A. MANNHEIM

Construire les axes d'une ellipse, étant donnés deux diamètres conjugués

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 529-535

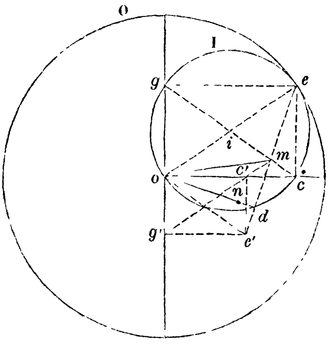
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__529_0>

CONSTRUIRE LES AXES D'UNE ELLIPSE, ÉTANT DONNÉS DEUX DIAMÈTRES CONJUGUÉS;

PAR M. A. MANNHEIM (*).

1. Faisons rouler (*fig.* 1) une circonférence I de centre i, dans l'intérieur d'une circonférence O de centre o dont le rayon est double du rayon de la pre-

Fig. 1.



mière. Un point quelconque de la circonférence I décrit alors un diamètre de la circonférence O. Je dis qu'*un point quelconque du plan de la circonférence* I *décrit une ellipse.*

Soit m le point décrivant, menons le diamètre mi: pendant le roulement, les extrémités c, g de ce diamètre décrivent les droites oc, og. On a alors un seg-

(*) J'ai retrouvé cette courte Note en réunissant les matériaux d'un Ouvrage que je me propose de publier sous le titre de *Géométrie cinématique.*

ment *cg* de grandeur constante, dont les extrémités glissent sur deux droites rectangulaires ; le point *m* de ce segment décrit une ellipse (*m*), dont les axes sont en direction *oc* et *og* et dont les demi-axes ont pour longueurs *mc*, *mg*.

La normale en *m* à l'ellipse (*m*) passe par le point de contact *e* des circonférences I et O. Cette normale *em* rencontre la circonférence I en *d*, et la droite *od*, qui est perpendiculaire à *em*, est parallèle à la tangente en *m* à l'ellipse. *Le diamètre od est donc, en direction, conjugué du diamètre om.*

Cherchons la longueur du diamètre conjugué de *om*. Pour cela, considérons le point *m* comme un point du segment *ed*. Pendant le roulement de I, ce segment reste de grandeur constante et se déplace dans l'angle *eod* ; le point *e* décrit la droite *eo* et le point *d*, la droite *od*. Lorsque le point *e* est venu en *o*, la droite *em* coïncide avec la droite *od* et le point *m* est venu en *n*, de façon que *on* soit égal à *em*. Mais nous avons vu que *od* est la direction conjuguée de *om* ; donc *le demi-diamètre conjugué de om est égal à em.*

D'après cela, si l'on donne les deux demi-diamètres conjugués *om*, *on*, on opérera ainsi, pour avoir les axes de l'ellipse (*m*) :

Du point m, on abaisse sur le diamètre no la perpendiculaire md. On porte sur cette droite le segment em égal au demi-diamètre no. Sur oe, comme diamètre, on décrit une circonférence et l'on trace le diamètre im de cette circonférence : les droites oc et og sont les directions des axes de (m) et les segments mc, mg sont les longueurs des demi-axes.

2. Si, au lieu de porter *no* en *me*, on porte le même segment en sens inverse en *me'*, on achèvera la con-

struction, comme précédemment, en décrivant une circonférence sur oe' comme diamètre. L'ellipse (m) peut, en effet, être engendrée par le point m considéré comme marqué sur la droite $g'c'$, qui est égale à la demi-différence de ses axes. On a, en même temps,

$$mc' = mc \quad \text{et} \quad mg' = mg.$$

Puisque mc' est parallèle à oe, les droites oe, oe' sont également inclinées sur les axes de l'ellipse (m).

Nous venons de voir que les segments oe, oe' sont respectivement égaux à la somme et à la différence des demi-axes de cette courbe; nous retrouvons alors cette construction, donnée par M. Chasles dans son *Aperçu historique*, p. 362, pour résoudre le problème dont nous nous occupons :

« *Par l'extrémité* A *d'un des deux demi-diamètres donnés, on mènera une droite perpendiculaire au second demi-diamètre; on portera sur cette droite, à partir du point* A, *deux segments égaux à ce second demi-diamètre;*

» *On joindra, par deux droites, les extrémités de ces segments au centre de la courbe;*

» *On divisera en deux également, par deux nouvelles droites, l'angle que ces deux premières feront entre elles et son supplément;*

» *Ces deux nouvelles droites seront, en direction, les deux axes principaux de l'ellipse;*

» *La somme des deux premières droites sera égale au grand axe, et leur différence sera égale au petit axe.* »

3. Pour arriver à la construction 1, nous n'avons pas eu besoin de recourir aux propriétés des diamètres con-

jugués d'une ellipse. Ces propriétés peuvent, au contraire, s'en déduire.

Dans la circonférence I, on a

$$mg \times mc = me \times md = on \times om \sin nom.$$

Ainsi : *le produit de deux diamètres conjugués par le sinus de l'angle qu'ils comprennent est égal au produit des axes de l'ellipse.*

Dans la circonférence I, la somme des carrés des distances du point m aux extrémités d'un diamètre quelconque est constante. On a alors

$$\overline{mo}^2 + \overline{me}^2 = \overline{mc}^2 + \overline{mg}^2,$$

c'est-à-dire que *la somme des carrés de deux diamètres conjugués de l'ellipse* (m) *est égale à la somme des carrés des axes de cette courbe.*

4. Nous allons montrer comment on peut arriver à la construction précédente par une tout autre voie, et sans avoir besoin de connaître la construction de la normale en un point de la ligne décrite pendant le roulement d'une courbe sur une autre.

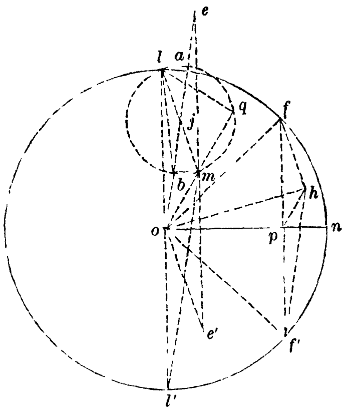
Appelons toujours om, on (*fig.* 2) les deux demi-diamètres conjugués donnés. Sur on, comme diamètre, décrivons une circonférence de cercle et menons ol perpendiculairement à on.

Si nous construisons des triangles tels que fph homothétiques au triangle lom, le lieu des points h est une ellipse (m) qui a pour diamètres conjugués om et on.

(On peut remarquer qu'on aura la même ellipse, en construisant des triangles tels que $f'ph$, homothétiques au triangle $l'om$.)

Au point f du cercle correspond le point h de l'ellipse m, et, comme fh rencontre la circonférence en un autre point que f, on aura sur cette droite un autre point de l'ellipse (m). Si alors nous menons à la circonférence de centre o une tangente parallèle à lm, cette

Fig. 2.



droite rencontrera la circonférence en deux points infiniment voisins auxquels correspondront, sur l'ellipse, deux points infiniment voisins : en d'autres termes, la tangente au cercle o, menée parallèlement à lm, est aussi tangente à l'ellipse (m).

De la même manière, nous pouvons dire qu'une tangente à la circonférence o, menée parallèlement à $l'm$, est tangente à (m).

Les droites ml, ml', étant parallèles à des tangentes communes à une ellipse et à un cercle concentriques, sont également inclinées sur les axes de l'ellipse (m).

Comme les droites lm, $l'm$ sont égales et parallèles à oe, oe' obtenus comme précédemment, nous retrouvons ainsi la première partie de la construction de M. Chasles.

Cherchons les axes de l'ellipse (m).

Faisons tourner le quadrilatère $ophf$ autour de o, de façon que of vienne coïncider avec ol. Le point p vient sur la circonférence décrite sur ol comme diamètre; le côté ph passe par le point q, où cette circonférence est rencontrée par om, parce que l'angle hpf est égal à l'angle mol, et que l'un des côtés de cet angle passe par l; enfin le point h sera un point du segment capable de l'angle fhp décrit sur lq.

Quel que soit le point f pris sur la circonférence o, on aura un point correspondant sur l'ellipse (m), et, en répétant ce que nous venons de dire, nous ramènerons ce point de l'ellipse sur le segment capable dont nous venons de parler. Ce segment contient alors le point m, et, comme l'angle lqm est droit, on l'obtient simplement en décrivant une circonférence sur lm comme diamètre.

Les distances du point o aux points de cette dernière circonférence sont respectivement égales aux longueurs des demi-diamètres de l'ellipse (m). Menons alors du point o la droite oj passant par le centre j de la circonférence décrite sur lm; cette droite rencontre cette circonférence en a et b : les segments oa et ob sont alors l'un maximum, l'autre minimum; par suite, le segment oa est le demi-grand axe de (m) et ob le demi-petit axe de cette courbe. On voit aussi que ml, ou son égal oe', est égal à la différence des demi-axes de l'ellipse (m).

Si nous avions considéré le quadrilatère $of'ph$ nous aurions trouvé de la même manière que ml', ou son égal oe, est égal à la somme des demi-axes de (m). Nous retrouvons ainsi la deuxième partie de la construction de M. Chasles.

Joignons le point b aux points l et m. Les droites bl, bm sont également inclinées sur lm et oj. Comme cette dernière droite est parallèle à ml', on voit que bl et bm sont également inclinés sur ml, ml' et donnent alors la direction des axes de (m). Nous avons, par suite, la construction suivante :

On mène, à partir du point o, une droite ol égale et perpendiculaire à on. Sur ml, comme diamètre, on décrit une circonférence. On joint le point o au centre j de cette circonférence. Cette droite coupe la circonférence j aux points a et b : les segments oa, ob sont les longueurs des demi-axes de l'ellipse (m), et les droites lb, mb sont parallèles aux axes de cette courbe.

Cette construction revient à la construction que nous avons donnée précédemment, et qu'on obtient en décrivant une circonférence sur oe' comme diamètre.

5. En faisant usage de la circonférence j, on arrive à un certain nombre de théorèmes. Nous n'énoncerons que les deux suivants, pour ne pas nous écarter de notre sujet, en appelant correspondantes des droites telles que of et oh.

Les axes de l'ellipse (m) font respectivement des angles égaux avec les diamètres correspondants de la circonférence o.

Le diamètre de l'ellipse (m), qui fait un angle maximum avec le diamètre correspondant de la circonférence o, est moyen proportionnel entre les axes de l'ellipse (m), etc., etc., etc.

6. Les axes de l'ellipse (m) étant les bissectrices des angles formés par oe et oe' rencontrent la circonférence circonscrite au triangle oee' aux points où cette courbe est coupée par la tangente en m à (m), puisque cette droite est la perpendiculaire élevée sur le milieu de ee'. Cette remarque donne une construction de la direction des axes de (m) et conduit à ce théorème connu :

Le produit des segments comptés sur la tangente en m à (m), entre ce point et les axes de la courbe, est égal au carré du demi-diamètre parallèle à cette tangente.