A. Tissot

Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 49-55

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__49_0>

MÉMOIRE

SUR LA REPRÉSENTATION DES SURFACES ET LES PROJECTIONS DES CARTES GÉOGRAPHIQUES ;

PAR M. A. TISSOT,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

PRÉAMBULE.

Objet du Mémoire et de chacun des Chapitres en particulier.

Le présent Mémoire a pour objet l'étude de la déformation dans la représentation d'une surface sur une autre, notamment dans la construction des cartes géographiques.

Le premier Chapitre traite de la loi de la déformation et des propriétés générales qui en dérivent. Le deuxième est consacré à la résolution de cette question : *Trouver le mode de projection le mieux approprié à la représentation plane d'une contrée particulière.* Dans les deux derniers, on compare entre elles les diverses projections des cartes géographiques au point de vue de la déformation.

Nous commençons par établir en partie le lemme suivant, dont la démonstration se trouve complétée un peu plus loin : *Quel que soit le système de projection, il y a, en tout point de l'une des surfaces, deux tangentes perpendiculaires entre elles, et, si les angles ne sont pas conservés, il y en a deux seulement, telles que les directions qui leur correspondent sur l'autre surface se coupent aussi à angle droit.* De là résulte l'existence de deux séries uniques de courbes orthogonales ayant aussi leurs projections orthogonales. En faisant varier de toutes les manières possibles le mode de succession des courbes de chaque série, on obtient une infinité de doubles canevas dont chacun décompose les deux surfaces en rectangles infiniment petits, et qui sont les seuls à posséder cette propriété dans le système de projection que l'on considère.

La déformation est soumise à une loi qui ne dépend ni de la nature des surfaces ni du mode de représentation adopté : *Toute représentation d'une surface sur une autre peut être remplacée, autour de chaque point, par une projection orthogonale faite à une échelle convenable* (*). Le lemme établi préalablement permet de donner de cette loi une démonstration géométrique très-simple. En suivant une marche inverse, il serait facile de constater analytiquement qu'un cercle infiniment petit tracé autour d'un point quelconque de la première surface, dans le plan tangent en ce point, est remplacé sur la seconde par une ellipse, ce qui prouverait autrement la loi énoncée ainsi que le lemme (**). De cette loi découlent un grand nombre de propriétés (***).

(*) Dans les figures homographiques, les relations métriques sont une conséquence des relations descriptives (Mémoire de M. Chasles, faisant suite à l'*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie*). Cette propriété fondamentale, dont Abel Transon a donné, dans les *Nouvelles Annales*, une démonstration analytique, se déduit immédiatement de la loi de la déformation.

(**) Cette loi et ce lemme ont leurs analogues dans la représentation des figures à trois dimensions.

(***) Dans le tome XLIX des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, nous avons publié, sans démonstration, les énoncés de ces propriétés et celui de la loi sur laquelle elles reposent. Depuis, ils ont été reproduits par M. A. Germain dans son *Traité des projections des cartes géographiques*, et par M. Ulysse Dini dans son Mémoire *Sopra*

Si l'on adopte comme unité le rayon du cercle infiniment petit, l'ellipse qui représente ce cercle et constitue une sorte d'*indicatrice* du mode de projection au point considéré aura ses dimensions exprimées par des nombres finis. Connaissant ses axes, on pourra calculer l'altération éprouvée par un angle donné, le *maximum* dont cette altération est susceptible, les rapports suivant lesquels les longueurs se trouvent modifiées dans les diverses directions, le plus grand et le plus petit de ces rapports, lesquels sont précisément égaux aux demi-axes, enfin l'altération de superficie. Quant aux longueurs et aux directions des axes, nous établirons les formules qui servent à les déterminer en fonction de deux coordonnées fixant à la fois la position de chaque point sur la première surface et celle de sa projection sur la seconde.

Ayant ainsi fourni le moyen d'étudier la déformation produite autour de chaque point, nous résoudrons d'autres questions dans lesquelles il s'agira de trouver sur les deux surfaces, soit les couples de séries de lignes, soit les doubles canevas remplissant certaines conditions, par exemple les séries de lignes sur lesquelles les longueurs se trouvent modifiées dans un rapport constant, ou, plus généralement, dans un rapport exprimé par une fonction

---

alcuni punti della teoria delle superficie (*Volumi dell' Accademia dei* XL, 3e serie, t. I), accompagnés de démonstrations propres à ces deux auteurs, mais moins simples que celles que nous avions en vue et que nous donnons ici.

M. Dini a fait voir de plus que toute la théorie de la courbure des surfaces peut se déduire des propriétés générales dont nous venons de parler. Il y est parvenu en les appliquant à la représentation d'une surface sur une sphère, effectuée d'après la méthode de Gauss, méthode dans laquelle on considère comme points correspondants ceux pour les quels les normales sont parallèles.

Grâce à M. Faye, la loi de la déformation a aussi trouvé place dans le Cours d'Astronomie de l'École Polytechnique.

connue des deux coordonnées, les doubles canevas formés de rectangles infiniment petits, ceux dont les angles varient suivant une loi donnée, ceux qui décomposent les surfaces en une infinité de losanges.

On appliquera les théories du premier Chapitre à deux modes particuliers de représentation plane d'une surface quelconque de révolution.

Dans le deuxième Chapitre, nous donnons le moyen de déterminer, pour les cartes de contrées d'une étendue comparable à celle de la France, quel est le système de projection qui occasionne la déformation la plus faible, non-seulement parmi ceux qui ont été considérés jusqu'à présent, mais parmi tous ceux qu'il serait possible d'imaginer. Afin de préciser davantage, disons qu'il s'agit d'un système qui, tout en ne produisant que des altérations d'angles de quelques secondes, par conséquent insignifiantes, réduise à son *minimum* la plus grande altération de longueur. Les coordonnées rectangulaires des divers points de la carte seront exprimées par des formules assez simples, les mêmes quel que soit le pays à représenter ; certains paramètres qui figurent dans ces formules varient seuls d'un pays à l'autre ; on en trouve les valeurs, dans chaque cas particulier, à l'aide d'un procédé graphique (*). Une méthode analogue serait applicable à la recherche d'un mode de projection qui, tout en n'altérant les aires que de quantités négligeables, réduirait à son *minimum* la plus grande altération d'angle dans la représentation d'un pays donné.

(*) Le tome LI des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* renferme une Note dans laquelle nous avons fait connaître les formules et le procédé en question, et dont le tome XXI des *Monthly Notices of the Royal astronomical Society* a donné une traduction anglaise.

Les régions peu étendues dans tous les sens ne sont pas les seules pour lesquelles nous donnions le moyen de déterminer le meilleur mode de projection. Nous avons résolu la même question pour toute zone comprise entre deux parallèles dont la différence des latitudes n'atteint pas un trop grand nombre de degrés, et aussi pour tout fuseau limité par deux méridiens dont l'angle remplit une condition analogue.

Les applications porteront principalement sur les cartes de France, d'Espagne, d'Egypte et d'Algérie.

Les deux derniers Chapitres se composent presque exclusivement de tableaux renfermant environ huit mille nombres à l'aide desquels on pourra se rendre un compte exact de la déformation produite par les divers systèmes de projection qui ont été jusqu'ici adoptés ou seulement proposés pour la construction des cartes géographiques (*). Dans le Chapitre III, où l'on a en vue la représentation de tout un hémisphère, les tableaux se rapportent, pour la plupart, à des points situés de 15 en 15 degrés de latitude et de 15 en 15 degrés de longitude; dans le Chapitre IV, ils se rapportent à des points plus rapprochés sur des cartes de moindre étendue; en tout cas, ils font connaître principalement, pour chacun des points considérés, le *maximum* de l'altération d'angle,

(*) Dans le principe, nous nous étions borné à considérer onze systèmes de projection (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. L; *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XIX; *Cosmos*, année 1865). L'extension donnée depuis à notre travail en a retardé la publication, mais elle nous met à même aujourd'hui de fournir aux constructeurs de cartes de Géographie et aux personnes qui veulent faire de ces cartes un usage rationnel des documents utiles en grande quantité. C'est seulement à l'aide de documents de cette nature que l'on peut reconnaître, parmi les divers systèmes de projection, celui qui convient le mieux à la représentation d'une portion donnée de la surface terrestre.

en degrés et minutes, les valeurs extrêmes du rapport dans lequel les longueurs se trouvent modifiées, avec trois chiffres décimaux, enfin le rapport des éléments superficiels avec la même approximation. Les ensembles de formules qui nous ont servi à calculer ces résultats numériques varient d'un système de représentation à un autre, mais tous se déduisent des formules générales établies dans le premier Chapitre ; afin d'abréger, nous nous abstiendrons de les reproduire (*) ; seulement, à cause de la confusion qui règne dans la nomenclature des diverses projections, il sera nécessaire que nous donnions en quelques mots la définition de chacune d'elles.

Nos tableaux ne concernent pas seulement les modes de représentation qui ont été mentionnés jusqu'à présent, mais aussi certains autres que les considérations suivantes nous engagent à proposer. La plupart des projections sont susceptibles d'être réparties en groupes tels que, dans chacun, elles ne diffèrent les unes des autres que par la valeur d'un paramètre. Parmi ces groupes, il y en a dont toutes les projections conservent les angles, d'autres dans lesquels une seule projection jouit de cette propriété, d'autres enfin dans lesquels aucune ne la possède : on peut chercher, pour chacun de ces derniers, quelle est la valeur du paramètre qui réduit à son *minimum* la plus grande des altérations d'angles de la carte. Une question analogue se présente à propos des aires, de même aussi à propos des longueurs, qui du reste ne se trouvent conservées sur aucune projection. Les solutions des questions ainsi posées dépendent nécessairement de

(*) Nous comptons revenir ailleurs sur ce sujet. Dans le tome XXI du *Journal de l'École Polytechnique*, nous avons établi directement les formules relatives à la projection dite de *Bonne* ou du *Dépôt de la Guerre*.

l'étendue et de la forme des pays que l'on veut reproduire; celles que nous avons obtenues permettront de remplacer les projections actuellement en usage par d'autres plus avantageuses, et de représenter avec moins de déformation des portions considérables de la surface terrestre, telles qu'un hémisphère, les trois parties de l'ancien continent, les deux Amériques, l'empire russe, etc. (*A suivre.*)