NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. LAISANT

Réflexions sur la cinématique du plan

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 481-507

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__481_0>

RÉFLEXIONS SUR LA CINÉMATIQUE DU PLAN;

Par M. A. LAISANT.

Préliminaires.

1. Il est généralement admis désormais que la Cinématique est une branche spéciale de la Mécanique rationnelle, qui peut et doit être étudiée préalablement aux autres. La Cinématique a tous les caractères de la Géométrie, avec l'addition de l'idée du *temps;* et il se trouve bien souvent qu'elle peut rendre à la Géométrie elle-même d'importants services.

Dès lors il est permis de se demander s'il n'y aurait pas un certain intérêt à procéder en Cinématique, comme on le fait en Géométrie, en commençant par l'étude des mouvements qui s'accomplissent *dans un seul plan,* avant de s'appliquer à ceux qui s'effectuent *dans l'espace.* Il y aurait peut-être à cela plusieurs avantages, en dehors de la question de méthode et d'analogie que nous venons de signaler. Bornons-nous à indiquer les deux suivants, d'ordres très-distincts l'un de l'autre.

En premier lieu, au point de vue pratique, la plupart des combinaisons d'organes de transmissions de mouvement reposent sur des translations dans des plans parallèles et sur des rotations autour d'axes parallèles, tous perpendiculaires à ces plans. Les exemples en sont nombreux, même dans des machines assez compliquées. Le praticien, le constructeur en possession de la *cinématique plane,* mais n'ayant pas étudié la *cinématique de l'espace,* aurait donc au moins les éléments principaux nécessaires à la pratique de son art.

En second lieu, lorsqu'on applique l'Analyse à la Cinématique, comme sont conduits à le faire de plus en plus les auteurs, afin de donner aux déductions un caractère de généralité aussi grand que possible, on se trouve forcé de passer à chaque instant de la géométrie analytique du plan à celle de l'espace, et inversement. L'inconvénient est sérieux; il n'est peut-être pas capital tant qu'on s'en tient aux méthodes ordinaires, puisqu'en définitive l'instrument algébrique est le même dans un cas que dans l'autre. Mais la confusion deviendrait extrême le jour où l'on se déciderait à faire usage des méthodes du calcul géométrique, dont l'application est si souvent féconde et élégante, et qui commencent à être employées dans divers pays étrangers, notamment en Angleterre et aux États-Unis. Pour l'étude des mouvements de l'espace, il faut, en effet, dans cette hypothèse, recourir à l'analyse des *quaternions*, et aborder par conséquent les difficultés inhérentes à l'emploi de cet algorithme. Pour les mouvements plans, au contraire, on n'a qu'à employer le calcul géométrique des *équipollences*, dont les règles sont identiquement les mêmes que celles de l'Algèbre. La classification de la Cinématique en deux grandes branches, plan et espace, se trouve donc encore tout naturellement indiquée.

Je ne veux pas pousser plus loin cette discussion à propos de l'enseignement de la Cinématique, discussion sur laquelle on pourrait insister plus longuement. Comme argument à l'appui des considérations qui précèdent, je me propose, dans la présente étude, d'appliquer à un certain nombre de questions de Cinématique plane les procédés du calcul des équipollences; j'espère arriver ainsi à montrer une fois de plus l'intérêt qu'il y a lieu d'apporter à l'emploi des méthodes *dites nouvelles*, et qui sont pour la plupart assez anciennes déjà.

Il ne s'agit pas ici d'un exposé didactique et méthodique d'une science ; je ne me propose nullement, dans ces considérations, de rédiger un traité, ni même le résumé d'un traité. Je prie donc le lecteur de me pardonner la forme un peu décousue peut-être de ce Mémoire, forme qui résulte du programme même que je me suis donné.

Si j'avais à composer un traité de Cinématique plane j'emploierais parfois, assez fréquemment même, mais non pas toujours, la méthode des équipollences ; les méthodes devant être, à mon avis, en Mathématiques, ce que sont les outils dans un atelier, l'outil doit varier suivant le travail qu'on se propose, si l'on veut que ce travail soit exécuté le mieux, le plus promptement et le plus facilement possible. L'ouvrier habile est celui qui non-seulement sait manier son outil, mais sait aussi le choisir avec discernement, au lieu d'employer constamment le même.

Mouvement d'un point. — Vitesses.

2. Le mouvement d'un point X dans un plan est représenté par une équipollence de la forme

$$\mathrm{OX} = f(t) \quad (*)$$

t exprimant le temps, f une fonction géométrique, et O une origine fixe. Le signe $=$ est ici celui de l'*équipollence* ou de l'*égalité géométrique*. Quant à la variable géométrique OX qui fixe à chaque instant la position du point mobile, nous la désignerons le plus souvent par la même lettre que son extrémité, écrite en petites

(*) *Voir* BELLAVITIS, *Exposition de la méthode des équipollences*, traduction française, p. 120 (Gauthier-Villars, 1874).

capitales; si bien que l'équipollence du mouvement s'écrira

$$x = f(t). \tag{1}$$

Le déplacement élémentaire du point est dx, et la dérivée

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t) \tag{2}$$

exprime évidemment la vitesse à l'instant t.

Si l'on écrit $OV = v$, le mouvement représenté par l'équation (2) est le *mouvement hodographique* du premier, et la trajectoire de V, ainsi décrite, l'*hodographe* de ce même mouvement de X.

L'aire infiniment petite, décrite par OX pendant le temps dt, est représentée en grandeur *et en signe* (suivant le sens de la rotation de OX), par

$$\frac{i}{4}(x.\mathrm{cj}\,dx - \mathrm{cj}\,x.dx)\ (^*),$$

et en divisant par dt, on a la *vitesse aréolaire*

$$u = \frac{i}{4}(x.\mathrm{cj}\,v - \mathrm{cj}\,x.v). \tag{3}$$

3. Si le mouvement d'un point X résulte de la composition des mouvements de plusieurs autres points X_1, X_2, X_3, . ., c'est-à-dire de l'*addition géométrique* de OX_1, OX_2, OX_3, ..., on aura évidemment, d'après la relation (2),

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots;$$

(*) *Voir* BELLAVITIS, *Exposition de la méthode des équipollences*, traduction française, p. 45. La lettre i remplace ici le *ramun*, pour plus de facilité typographique.

d'où résulte immédiatement la méthode de Roberval pour le tracé des tangentes.

4. Effectuons le quotient $\frac{\mathrm{x}}{\frac{d\mathrm{x}}{dt}} = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{v}}$, et mettons-le sous la forme $l + \lambda i$. Alors $\mathrm{x} = l\mathrm{v} + \lambda i\mathrm{v}$, et il en résulte que les relations

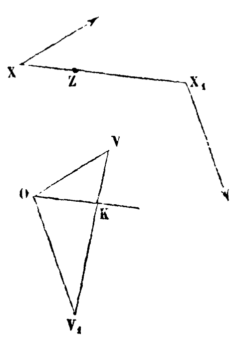
$$(4) \qquad \mathrm{P} = \lambda i \mathrm{v}, \quad \mathrm{Q} = l\mathrm{v}$$

représentent respectivement des mouvements sur la *podaire* de la trajectoire, et sur la *podaire de la développée* de cette trajectoire. Les équipollences (4) peuvent donc servir à l'étude géométrique de ces deux courbes.

5. A l'aide de cette méthode de calcul géométrique, on peut établir de nombreuses propriétés des vitesses, et résoudre des problèmes de Géométrie ou de Cinématique, souvent avec une extrême facilité. A titre d'exemple, nous nous contenterons d'indiquer celui-ci :

Déterminer l'enveloppe de la droite qui joint à chaque instant deux points mobiles.

Fig. 1.



Soient O l'origine (*fig.* 1); X et X_1 les positions des deux points mobiles à l'instant t; OV et OV_1 leurs vitesses respectives; enfin Z le point cherché de l'enveloppe.

Ce point Z étant situé sur la droite XX_1, nous aurons, k étant un paramètre variable algébrique,

$$(5)\qquad z = kx + (1 - k)x_1;$$

d'où, pour la vitesse de Z,

$$(6)\qquad \frac{dz}{dt} = kv + (1 - k)v_1 + dk(x - x_1).$$

Cette vitesse, pour que Z soit situé sur l'enveloppe, doit avoir même direction que XX_1. Mais le dernier terme ayant déjà cette direction, il suffit de poser

$$(7)\qquad kv + (1 - k)v_1 \parallel x - x_1 \ (^*)$$

pour déterminer k.

Cela donne lieu, comme l'on voit, à la construction géométrique très-simple que voici pour déterminer le point Z : mener OK, parallèle à XX_1, jusqu'à la rencontre de VV_1, et diviser XX_1 en Z comme VV_1 est divisé en K.

La relation (7) permet de déterminer k par le calcul, en remplaçant dans le second membre $x - x_1$ par $u(x - x_1)$ et éliminant ensuite u entre l'équipollence ainsi obtenue et l'équipollence conjuguée. Cela donne le moyen d'avoir ainsi, dans chaque cas particulier, la détermination du mouvement de Z et celle de sa vitesse, en se servant des relations (5) et (6).

Accélérations.

6. L'accélération étant la dérivée géométrique de la

(*) Le signe $\parallel$ employé ici est celui du *parallélisme*, c'est-à-dire de l'égalite de direction, independamment de la grandeur.

vitesse par rapport au temps aura pour expression

$$(8) \qquad \mathrm{w} = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = \frac{d^2\mathrm{x}}{dt^2} = f''(t).$$

En appelant v la grandeur de la vitesse, et φ son inclinaison, on a $\mathrm{v} = v\varepsilon^{\varphi}$ (*) ce qui permet de donner encore à l'accélération la forme

$$(9) \qquad \mathrm{w} = \frac{dv}{dt}\varepsilon^{\varphi} + iv\frac{d\varphi}{dt}\varepsilon^{\varphi} = \varepsilon^{\varphi}\left(\frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{\rho}i\right),$$

ρ étant le rayon de courbure.

Cette décomposition peut encore s'effectuer en posant

$$\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{v}} = m + \mu i;$$

d'où il suit que

$$(10) \qquad m\mathrm{v} = \frac{dv}{dt}\varepsilon^{\varphi} \quad \text{et} \quad i\mu\mathrm{v} = i\frac{v^2}{\rho}\varepsilon^{\varphi}.$$

On peut remarquer, en égalant les grandeurs, qu'on obtient ainsi les équations

$$(11) \qquad m = \frac{\frac{dv}{dt}}{v}, \qquad \mu = \frac{v}{\rho},$$

et aussi

$$v = ae^{\int_0^t m\,dt},$$

qui peuvent à l'occasion présenter quelque intérêt, et dont la seconde donne le rayon de courbure au moyen de μ.

Si le point mobile X est rapporté à des coordonnées

(*) Rappelons que ε est employé pour e^i.

polaires, on a

$$(12)\qquad \mathrm{x} = r\varepsilon^{\theta},$$

$$(13)\qquad \mathrm{v} = \frac{dr}{dt}\varepsilon^{\theta} + i.r\frac{d\theta}{dt}\varepsilon^{\theta},$$

$$(14)\qquad \mathrm{w} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\varepsilon^{\theta} + \frac{1}{r}\frac{d\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)}{dt}i\varepsilon^{\theta},$$

décompositions connues de la vitesse et de l'accélération.

Accélérations centrales.

7. Une accélération *centrale* étant assujettie à passer constamment par un point fixe, prenons ce point pour origine, et supposons que le point mobile soit déterminé par des coordonnées polaires, sous la forme (12).

Appelons en outre w la grandeur de l'accélération w; nous aurons alors

$$(15)\qquad \mathrm{w} = w.\varepsilon^{\theta},$$

c'est-à-dire, par comparaison avec la relation (14), qu'il faut

$$\frac{d.r^2\frac{d\theta}{dt}}{dt} = 0,$$

$$(16)\qquad r^2\frac{d\theta}{dt} = c.$$

En d'autres termes, la vitesse aréolaire $\frac{1}{2}c$ est constante.

Cherchons maintenant à étudier l'hodographe du mouvement, et, dans ce but, exprimons-en le rayon de courbure. D'après la seconde relation (11), il suffit pour cela de mettre $\frac{\frac{d\mathrm{w}}{dt}}{\mathrm{w}}$ sous la forme $m' + \mu' i$, comme nous le faisions tout à l'heure pour $\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{v}}$, et le rayon de la courbure cherché sera $\frac{\mathrm{w}}{\mu'}$.

Or

$$\frac{d\mathrm{w}}{dt} = \mathrm{w}' = \frac{dw}{dt}\varepsilon^\theta + iw\frac{d\theta}{dt}\varepsilon^\theta = \left(\frac{dw}{dt} + i\frac{cw}{r^2}\right)\varepsilon^\theta,$$

en vertu de l'équation (16). Donc

$$(17)\qquad \frac{\mathrm{w}'}{\mathrm{w}} = \frac{\frac{dw}{dt}}{w} + i\frac{c}{r^2},$$

et par conséquent le rayon de courbure de l'hodographe est

$$(18)\qquad \rho_h = \frac{wr^2}{c},$$

en sorte que *ce rayon de courbure est proportionnel au produit de l'accélération par le carré du rayon vecteur.*

Il s'ensuit immédiatement diverses conséquences importantes, et en premier lieu celle qui est relative au cas de l'accélération dont la grandeur est en raison inverse du carré du rayon vecteur. Il est clair en effet que dans cette hypothèse l'hodographe sera une circonférence, et réciproquement, pour tout mouvement d'accélération centrale.

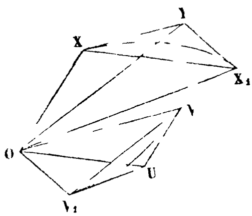
Si l'accélération est inversement proportionnelle au rayon vecteur, le rayon de courbure de l'hodographe est alors proportionnel à ce rayon. En général, si w est proportionnel à r^n, ρ_h sera proportionnel à r^{n+2}.

8. Voici encore une propriété commune à tous les

mouvements d'accélération centrale, et qui a été énoncée par Hamilton.

Si X et X_1 sont deux positions du mobile sur la trajectoire ; V et V_1 les points correspondants de l'hodo-

Fig. 2.



graphe ; XY et X_1Y les tangentes à la trajectoire, se rencontrant en Y ; et VU et V_1U les tangentes à l'hodographe, se rencontrant en U ; alors OY est parallèle à la corde VV_1 de l'hodographe, et OV est parallèle à la corde XX_1 de la trajectoire.

Ce théorème, qu'on peut très-facilement démontrer géométriquement, est une conséquence de la constance des aires. En voici une démonstration analytique. On a

$$\mathrm{x}.\mathrm{cj}\,\mathrm{v} - \mathrm{cj}\,\mathrm{x}.\mathrm{v} = \mathrm{x}_1.\mathrm{cj}\,\mathrm{v}_1 - \mathrm{cj}\,\mathrm{x}_1.\mathrm{v}_1.$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{x} + y\,\mathrm{v} = \mathrm{x}_1 + y_1\mathrm{v}_1, \quad \mathrm{u} = \mathrm{v} + u\,\mathrm{x} = \mathrm{v}_1 + u_1\mathrm{x}_1;$$

d'où

$$\mathrm{y}.\mathrm{cj}\,\mathrm{v} - \mathrm{cj}\,\mathrm{y}.\mathrm{v} = \mathrm{y}.\mathrm{cj}\,\mathrm{v}_1 - \mathrm{cj}\,\mathrm{y}.\mathrm{v}_1,$$

$$\mathrm{y}.\mathrm{cj}(\mathrm{v} - \mathrm{v}_1) = \mathrm{cj}\,\mathrm{y}.(\mathrm{v} - \mathrm{v}_1),$$

et par conséquent

$$\mathrm{y} \parallel \mathrm{v} - \mathrm{v}_1.$$

On a de même

$$\mathrm{u} \parallel \mathrm{x} - \mathrm{x}_1.$$

9. On peut reconnaître que, pour une accélération centrale, la trajectoire est une conique chaque fois que l'hodographe est circulaire.

Dans ce cas, la vitesse peut évidemment se mettre sous la forme

$$(19)\qquad \mathrm{v} = a\varepsilon^{\alpha} + b\varepsilon^{\varphi},$$

φ étant seul variable dans cette équipollence. De là

$$\mathrm{w} = ib\frac{d\varphi}{dt}\varepsilon^{\varphi},$$

de telle sorte que la direction de w est perpendiculaire à celle de ε^{φ}. Mais cette direction de l'accélération est la même que celle du rayon vecteur $\mathrm{x} = r\varepsilon^{\theta}$; par conséquent $\varphi + \frac{\pi}{2} = \theta$, et v peut se mettre sous la forme

$$(20)\qquad \mathrm{v} = a\varepsilon^{\alpha} - ib\varepsilon^{\theta}.$$

Égalant cette valeur à celle de la relation (13) et divisant par ε^{θ},

$$\frac{dr}{dt} + ir\frac{d\theta}{dt} = a\varepsilon^{(\alpha-\theta)} - ib,$$

ou [formule (16)]

$$\frac{dr}{dt} + i\frac{c}{r} = a\cos(\alpha - \theta) + i[a\sin(\alpha - \theta) - b],$$

et, par l'expression de l'égalité des parties imaginaires,

$$(21)\qquad r = \frac{c}{a\sin(\alpha - \theta) - b},$$

équation d'une conique rapportée à son foyer. Ainsi, pour l'hodographe circulaire, la trajectoire est toujours une conique, et le centre des accélérations occupe l'un des foyers de cette conique.

La loi de l'inverse du carré de la distance se déduit d'ailleurs immédiatement du calcul ci-dessus, puisque w est d'une grandeur proportionnelle à $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{r^2}$.

Autres propriétés des accélérations.

10. La proportionnalité des aires décrites et des temps, pour une accélération centrale, n'est qu'un cas particulier d'une propriété plus générale, s'appliquant à tous les mouvements plans possibles.

Soient σ l'aire décrite par le rayon vecteur au temps t ; X le point mobile ; XH la vitesse ; XK son accélération.

On a bien évidemment

$$\frac{d\sigma}{dt} = \text{aire OXH} = \frac{i}{4}(\mathrm{x}.\mathrm{cj}\,\mathrm{v} - \mathrm{cj}\,\mathrm{x}.\mathrm{v}),$$

Prenant les dérivées, en nous rappelant toujours que v et w sont les deux premières dérivées de x,

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = \frac{i}{4}(\mathrm{x}.\mathrm{cj}\,\mathrm{w} - \mathrm{cj}\,\mathrm{x}.\mathrm{w}) = \text{aire OXK}.$$

Ainsi la vitesse aréolaire est mesurée par l'aire du triangle OXH, et l'accélération aréolaire par celle de OXK ; d'où il suit que cette dernière est constamment la dérivée de la précédente.

Pour le cas d'une accélération centrale, l'aire OXK est constamment nulle ; conséquemment $\frac{d\sigma}{dt} = \text{const.}$, et les aires σ croissent proportionnellement aux temps.

Si les aires croissaient proportionnellement aux carrés des temps, on aurait $\frac{d^2\sigma}{dt^2} = \text{const.}$; donc aire OXK serait constante, c'est-à-dire que l'accélération serait en raison inverse de la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur sa direction.

Réciproquement, s'il en est ainsi, on aura

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = \text{const.} = a,$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = at + b,$$

$$\sigma = \frac{a}{2} t^2 + bt,$$

en faisant coïncider l'origine des aires avec la position du rayon vecteur à l'origine des temps.

11. *Le demi-accroissement du carré de la vitesse, relatif à l'élément de temps, est égal au produit de l'accélération par la projection sur l'accélération du chemin élémentaire.* (RESAL, *Cinématique pure*, p. 66.)

En effet, le carré v^2 de la vitesse est $\mathrm{v.cjv}$; d'où

$$\begin{aligned} dv^2 &= d\mathrm{v.cj\,v} + \mathrm{v.cj}\,d\mathrm{v} = \mathrm{w.cj\,v}\,dt + \mathrm{v}\,dt.\mathrm{cj\,w} \\ &= \mathrm{w.cj}\,d\mathrm{x} + d\mathrm{x.cj\,w}, \end{aligned}$$

ce qui démontre la propriété en question.

On passerait de là aux déplacements finis, comme d'habitude.

12. Les propriétés de l'accélération, et notamment la décomposition en accélération normale et accélération tangentielle, permettent, avec une grande facilité, de déterminer et de construire les rayons de courbure de certaines courbes (la spirale d'Archimède, les coniques, la cycloïde, par exemple). Nous ne développerons aucun calcul à ce sujet, dans le seul but d'éviter de trop allonger cette Note. Le lecteur y suppléera facilement.

Accélérations des divers ordres.

13. Nous avons remarqué que, si x indique la position d'un point mobile, v sa vitesse, w son accélération,

v et w sont les deux premières dérivées de x. Nous donnerons le nom d'*accélérations des divers ordres* aux dérivées suivantes w_2, w_3, ... L'accélération du second ordre w_2, c'est-à-dire la deuxième dérivée de la vitesse, est souvent appelée aussi *suraccélération* du mobile.

Proposons-nous de chercher à décomposer une accélération d'ordre quelconque, comme nous l'avons fait pour la première, suivant la tangente et la normale à la courbe. A cet effet, supposons que cette décomposition soit obtenue pour l'accélération w_p, et appelons $w_{t,p}$, $w_{n,p}$ les deux composantes. Si nous prenons la vitesse, comme plus haut, sous la forme

$$\mathrm{v} = v\varepsilon^{\varphi},$$

il est évident qu'on aura

$$\mathrm{w}_p = (w_{t,p} + iw_{n,p})\,\varepsilon^{\varphi}. \tag{22}$$

Cela posé, pour obtenir w_{p+1}, il suffit de prendre la dérivée de l'expression (22), ce qui donne

$$\mathrm{w}_{p+1} = \left[\left(\frac{dw_{t,p}}{dt} - w_{n,p}\frac{v}{\rho}\right) + i\left(\frac{dw_{n,p}}{dt} + w_{t,p}\frac{v}{\rho}\right)\right]\varepsilon^{\varphi}, \tag{23}$$

en se rappelant toujours que $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{\rho}$.

Donc

$$w_{t,p+1} = \frac{dw_{t,p}}{dt} - w_{n,p}\frac{v}{\rho}, \tag{24}$$

$$w_{n,p+1} = \frac{dw_{n,p}}{dt} + w_{t,p}\frac{v}{\rho}, \tag{25}$$

ce qui fournit une méthode générale pour résoudre le problème proposé, en partant des premières valeurs de w_n et w_p, qui sont, comme nous l'avons vu, $\frac{dv}{dt}$ et $\frac{v^2}{\rho}$, respectivement.

Dans ces calculs, les dérivées successives de ρ se présenteront évidemment. On peut leur donner une interprétation géométrique avantageuse; car on a tout d'abord

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \rho_1 \frac{v}{\rho},$$

si nous appelons ρ_1 le rayon de courbure de la développée de la trajectoire.

Et d'une manière générale, si ρ_p est le rayon de courbure de la $p^{\text{ième}}$ développée,

$$\frac{d\rho_p}{dt} = \rho_{p+1}\frac{v}{\rho}.$$

Par conséquent, en faisant ces substitutions, au fur et à mesure, dans les dérivations successives, on introduira les rayons de courbure des développées successives de la trajectoire, au lieu d'expressions analytiques dont l'interprétation concrète serait peu saisissable.

Le calcul, fait comme nous venons de l'indiquer, nous donne, pour les composantes de la suraccélération,

$$(26)\qquad w_{t,2} = \frac{d^2v}{dt^2} - \frac{v^3}{\rho^2}, \qquad w_{n,2} = 3\frac{v}{\rho}\frac{dv}{dt} - \frac{v^3}{\rho^3}\rho_1;$$

et, pour celles de l'accélération du troisième ordre,

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} w_{t,3} &= \frac{d^3v}{dt^3} - 6\frac{v^2}{\rho^2}\frac{dv}{dt} + 3\frac{v^4}{\rho^4}\rho_1,\\ w_{n,3} &= 4\frac{v}{\rho}\frac{d^2v}{dt^2} + 3\frac{1}{\rho}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 - 6\frac{v^2}{\rho^3}\rho_1\frac{dv}{dt}\\ &\quad + 3\frac{v^4}{\rho^5}\rho_1^2 - \frac{v^4}{\rho^4}\rho_2 - \frac{v^4}{\rho^3}. \end{aligned}\right.$$

On voit que les expressions se compliquent singulièrement à mesure qu'on passe d'un ordre à un ordre supérieur.

Les circonstances relatives au mouvement uniforme, ou au mouvement circulaire, s'obtiendraient respectivement en annulant $\frac{dv}{dt}$, $\frac{d^2v}{dt^2}$, ..., ou bien en annulant ρ_1, ρ_2, ...

Pour le mouvement circulaire uniformément varié, en posant $\frac{dv}{dt} = \alpha$, les formules ci-dessus se réduisent à

$$w_{t,2} = -\frac{v^3}{\rho^2}, \qquad w_{n,2} = \frac{3\alpha v}{\rho},$$

$$w_{t,3} = -\frac{6\alpha v^2}{\rho^2}, \qquad w_{n,3} = \frac{3\alpha^2}{\rho} - \frac{v^4}{\rho^3}.$$

Enfin, dans le mouvement uniforme et circulaire, les accélérations d'ordres impairs sont normales; celles d'ordres pairs sont tangentielles, ce qu'il est très-aisé de reconnaître directement.

14. On peut avoir quelquefois intérêt à effectuer la décomposition d'une accélération d'ordre quelconque, suivant la direction du rayon vecteur, et perpendiculairement à cette direction. Si w_p se décompose ainsi, en u_p et z_p, et si $\mathrm{x} = r\varepsilon^\theta$, on aura

$$\mathrm{w}_p = (u_p + i z_p)\varepsilon^\theta; \tag{28}$$

d'où, prenant la dérivée et appelant ω la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$,

$$\mathrm{w}_{p+1} = \left[\left(\frac{du_p}{dt} - \omega z_p\right) + i\left(\frac{dz_p}{dt} + \omega u_p\right)\right]\varepsilon^\theta, \tag{29}$$

c'est-à-dire

$$u_{p+1} = \frac{du_p}{dt} - \omega z_p, \tag{30}$$

$$z_{p+1} = \frac{dz_p}{dt} + \omega u_p. \tag{31}$$

Ces formules, analogues aux relations (24) et (25), serviront à la détermination successive des composantes des divers ordres.

Appelons ω', ω'', ... les accélérations angulaires des divers ordres $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d^2\omega}{dt^2}$, ..., et q, q', q'', ... la vitesse et les accélérations successives de translation $\frac{dr}{dt}$, $\frac{d^2r}{dt^2}$, $\frac{d^3r}{dt^3}$, ... Alors l'application des formules (30), (31), en partant, par exemple, de la vitesse $(q+i\omega r)\varepsilon^\theta$, nous donne, pour les composantes de l'accélération,

$$(32) \qquad u_1 = q' - \omega^2 r, \quad z_1 = 2\omega q + \omega' r;$$

pour celles de la suraccélération,

$$(33) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_2 = q'' - 3\omega^2 q - 3\omega\omega' r, \\ z_2 = 3\omega q' + 3\omega' q + \omega'' r - \omega_3 r; \end{array} \right.$$

et enfin, pour l'accélération du troisième ordre,

$$(34) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_3 = q''' - 6\omega^2 q' - 12\omega\omega' q - (3\omega'^2 + 4\omega\omega'')r + \omega^4 r, \\ z_3 = 4\omega q'' + 6\omega' q' + 4(\omega'' - \omega^3)q + (\omega''' - 6\omega^2\omega')r. \end{array} \right.$$

Ces calculs, dans le cas le plus général, deviennent assez compliqués; mais ils se simplifient souvent dans certaines applications particulières. Par exemple, dans le cas où q et ω sont constants (mouvement uniforme sur une spirale logarithmique), on voit que les accélérations successives, suivant le rayon vecteur, sont

$$-\omega^2 r, \quad -3\omega^2 q, \quad \omega^4 r, \quad 5\omega^4 q, \quad -\omega^6 r, \quad -7\omega^6 q, \quad \omega^8 r, \quad \ldots,$$

et celles dirigées dans le sens perpendiculaire

$$2\omega q, \quad -\omega^3 r, \quad -4\omega^3 q, \quad \omega^5 r, \quad 6\omega^5 q, \quad -\omega^7 r, \quad -8\omega^7 q, \quad \ldots;$$

la loi de formation successive est ici évidente.

15. Un point mobile se trouvant en X à un instant donné, soient à cet instant XU_0, XU_1, XU_2, ... sa vitesse et ses accélérations successives appliquées en X. La loi du mouvement de l'un quelconque des points U est aisée à déterminer, car on a

$$\mathrm{u}_n = \mathrm{x} + \mathrm{w}_n;$$

d'où

$$\frac{d\mathrm{u}_n}{dt} = \mathrm{v} + \mathrm{w}_{n+1}, \quad \frac{d^2\mathrm{u}_n}{dt^2} = \mathrm{w} + \mathrm{w}_{n+2}.$$

Cela fournit le moyen de résoudre immédiatement, et cela par une construction des plus simples, le problème suivant :

Connaissant, à un instant quelconque, la position d'un point mobile X, *sa vitesse* XU_0 *et ses accélérations successives* XU_1, XU_2, XU_3, ..., *déterminer les tangentes et les rayons de courbure des trajectoires décrites par les points* U_0, U_1, U_2, ...

Un triangle formé par deux accélérations XU_n, XU_p a pour aire

$$\text{aire}(XU_nU_p) = \frac{i}{4}(\mathrm{w}_n \,\mathrm{cj}\, \mathrm{w}_p - \mathrm{cj}\, \mathrm{w}_n \,\mathrm{w}_p).$$

De là on déduit, pour la dérivée de cette aire,

$$(35) \quad \mathfrak{D}.\text{aire}(XU_nU_p) = \text{aire}(XU_{n+1}U_p) + \text{aire}(XU_nU_{p+1}),$$

propriété plus générale encore que celle du n° 10.

Si $p = n + 1$, la relation (35) se réduit à

$$(36) \quad \mathfrak{D}.\text{aire}(XU_nU_{n+1}) = \text{aire}(XU_nU_{n+2}).$$

Ainsi : *l'aire du triangle que forment deux accélérations d'ordres consécutifs a pour dérivée l'aire du triangle formé par la première de ces deux accélérations, avec celle qui la suit de deux rangs.*

Mouvement d'une figure dans un plan.

16. Considérons le déplacement fini d'une figure plane dans son plan. Soit OX une droite quelconque de la figure, qui vient en O_1X_1. Prenons O pour origine, et posons $OO_1 = A$; enfin appelons α l'angle des deux directions OX, O_1X_1. Il est visible que la figure peut être amenée de sa première position à la seconde, par une translation marquée par A, suivie d'une rotation égale à α autour du point O_1. Cela nous donne

$$(37) \qquad x_1 = A + x\varepsilon^{\alpha}.$$

En appliquant cette relation au point Ω, tel que

$$\Omega = A + \Omega\,\varepsilon^{\alpha},$$

ce qui donne

$$(38) \qquad \Omega = \frac{A}{1 - \varepsilon^{\alpha}},$$

le point Ω restera immobile, c'est-à-dire que le mouvement considéré équivaut à une rotation autour de ce point.

La construction de Ω se fait de la manière la plus simple, en traçant sur OO_1 comme base le triangle isoscèle $O\Omega O_1$, dont l'angle au sommet $O\Omega O_1$ est égal à α en grandeur et en signe.

S'il s'agit maintenant d'un mouvement infiniment petit, le point Ω prend le nom de *centre instantané de rotation;* la formule (38) devient alors

$$(39) \qquad \Omega = i\,\frac{dA}{\alpha}.$$

17. Considérons maintenant le mouvement continu d'une figure plane; soient M la position prise à l'instant t

par le point qui coïncidait d'abord avec l'origine O et λ l'angle total dont a tourné la figure à cet instant t.

D'après le numéro précédent, si nous appelons Ω le centre instantané de rotation, nous aurons

$$\text{M}\Omega = i\frac{d\text{M}}{d\lambda},$$

et par suite

$$(40)\qquad \Omega = \text{M} + i\frac{d\text{M}}{d\lambda}.$$

Cette équipollence, M et λ étant donnés en fonction du temps, nous représente le lieu des centres instantanés sur le plan fixe.

Si nous ramenons la figure mobile à l'origine, en supposant qu'elle entraîne avec elle le point Ω, et que celui-ci vienne ainsi en Λ_0, le lieu des points Λ_0 sera évidemment donné par l'équipollence

$$(41)\qquad \Lambda_0 = \frac{i\dfrac{d\text{M}}{d\lambda}}{\varepsilon^{\lambda}}.$$

Nous avons ainsi le lieu des centres instantanés liés à la figure mobile, ramené à l'origine.

Le roulement de la courbe (41), sur la courbe (40) comme base, représente le mouvement.

Un point ayant X_0 pour position initiale et entraîné par la figure mobile viendra au temps t en un point X donné par la relation

$$(42)\qquad \text{X} = \text{M} + \text{X}_0\varepsilon^{\lambda}.$$

La courbe roulante, dans une position quelconque répondant à l'instant t', aura pour équipollence

$$(43)\qquad \Lambda = \text{M}' + \frac{i\dfrac{d\text{M}}{d\lambda}}{\varepsilon^{\lambda}}\varepsilon^{\lambda'} = \text{M}' + i\frac{d\text{M}}{d\lambda}\varepsilon^{\lambda'-\lambda}.$$

Ici t' devra être considéré comme fixe, et t comme variable indépendante. Il est évident que, si l'on donne à t la valeur t', on tombera sur l'expression (40), c'est-à-dire que Λ coïncidera avec Ω.

Pour cette valeur particulière t', la différentielle de Λ, qui est

$$d\Lambda = \varepsilon^{\lambda'-\lambda}\left[d\mathrm{M} + id\left(\frac{d\mathrm{M}}{d\lambda}\right)\right],$$

se réduit à

$$d\mathrm{M}' + id\left(\frac{d\mathrm{M}'}{d\lambda'}\right) = d\Omega.$$

On reconnaît donc que les deux courbes (Ω) et (Λ) sont tangentes au point considéré, et que les vitesses sont égales, ce qui montre bien que le roulement s'effectue sans glissement.

18. D'après la relation (42), la vitesse d'un point X quelconque est

$$\frac{d\mathrm{x}}{dt} = \frac{1}{dt}(d\mathrm{M} + i\mathrm{x}_0 d\lambda . \varepsilon^{\lambda}) = \frac{i\,d\lambda}{dt}\left(\mathrm{x}_0\varepsilon^{\lambda} - i\frac{d\mathrm{M}}{d\lambda}\right).$$

Or, en retranchant la relation (40) de (42),

$$\mathrm{x} - \Omega = \mathrm{x}_0\varepsilon^{\lambda} - i\frac{d\mathrm{M}}{d\lambda}.$$

Donc

$$\frac{d\mathrm{x}}{dt} = \frac{i\,d\lambda}{dt}(\mathrm{x} - \Omega). \tag{44}$$

19. Si, pour obtenir l'accélération du point x, nous différentions la relation (44), nous trouvons sans peine

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2\mathrm{x}}{dt^2} &= -(\mathrm{x} - \Omega)\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 \\ &\quad + i(\mathrm{x} - \Omega)\frac{d^2\lambda}{dt^2} - i\frac{d\lambda}{dt}\frac{d\Omega}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Ce résultat connu se prête à un énoncé facile en langage ordinaire, et il s'obtient, comme l'on voit, sans introduction de considérations géométriques.

En différentiant simplement l'équipollence (42), on peut aussi mettre l'accélération sous la forme

$$(46) \qquad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 m}{dt^2} - x_0 \left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 \varepsilon^\lambda + i x_0 \frac{d^2\lambda}{dt^2} \varepsilon^\lambda,$$

qui est également d'une interprétation facile.

Remplaçons la vitesse angulaire instantanée $\frac{d\lambda}{dt}$ par ω, pour plus de simplicité, dans les formules précédentes, et, partant de la formule (45) par exemple, cherchons la condition pour que l'accélération $\frac{d^2 x}{dt^2}$ s'annule. En appelant U le point pour lequel il en est ainsi, nous aurons

$$(47) \qquad u = \Omega + \frac{\omega \frac{d\omega}{dt}}{\frac{d\omega}{dt} + i\omega^2},$$

c'est-à-dire que, pour chaque position de la figure, il y a un point U (centre des accélérations) et un seul, dont l'accélération est nulle.

On peut écrire encore

$$\Omega U \left[1 + i \frac{\omega^2}{\frac{d\omega}{dt}} \right] = \omega \frac{\frac{d\Omega}{dt}}{\frac{d\omega}{dt}},$$

$$\Omega U \left[1 - i \frac{\frac{d\omega}{dt}}{\omega^2} \right] = -i \frac{\frac{d\Omega}{dt}}{\omega}.$$

Cela nous montre que la perpendiculaire élevée en U à la droite ΩU coupe la direction de la tangente commune aux courbes roulantes en un point A, tel que

$$\text{(48)} \qquad \Omega A = \omega \frac{\frac{d\Omega}{dt}}{\frac{d\omega}{dt}};$$

et la normale commune en un point B tel que

$$\text{(49)} \qquad \Omega B = -i \frac{\frac{d\Omega}{dt}}{\omega}.$$

Si ω est constant, le centre des accélérations se réduit au point B, lequel est d'ailleurs indépendant du temps, puisqu'on peut écrire

$$\Omega B = -i \frac{d\Omega}{d\lambda}.$$

Pour cette raison, on donne souvent au point B la dénomination de *centre géométrique des accélérations*.

En faisant les mêmes calculs sur la formule (46), on a

$$MU = \frac{\frac{d^2 M}{dt^2}}{\omega^2 - i\frac{d\omega}{dt}};$$

et, en procédant comme nous venons de le faire, on verrait que la perpendiculaire à MU en U coupe respectivement l'accélération du point M et une perpendiculaire à cette accélération en deux points A′ et B′, tels que

$$\text{(50)} \qquad MA' = \frac{\frac{d^2 M}{dt^2}}{\omega^2},$$

$$\text{(51)} \qquad MB' = i \frac{\frac{d^2 M}{dt^2}}{\frac{d\omega}{dt}}.$$

Donc, si l'on joint le centre des accélérations à un point quelconque M, et si l'on élève par ce centre une perpendiculaire à la droite ainsi menée, cette perpendiculaire coupera l'accélération du point M, et une perpendiculaire, en deux points déterminés respectivement par les relations (50) et (51) ci-dessus.

De plus, l'angle du rayon vecteur UM avec l'accélération de M a évidemment pour tangente $\frac{\frac{d\omega}{dt}}{\omega^2}$ ou $-\frac{d\left(\frac{1}{\omega}\right)}{dt}$.

Il serait facile de déduire de là de nombreuses propriétés des accélérations, et particulièrement celles qu'a données M. Transon, et dont on trouve l'exposé dans l'excellent Traité de Cinématique pure de M. Resal. Mais nous nous bornerons ici à ces considérations.

20. En prenant les dérivées successives de l'équipollence (46), il est aisé de voir, sans même effectuer le calcul, qu'on pourra toujours égaler à zéro chacune de ces dérivées, et que cela donnera chaque fois une valeur, et une seule, pour x_0. Donc il y a un *centre des accélérations* U_n pour les accélérations $\frac{d^{n+1}x}{dt^{n+1}}$ d'un ordre n quelconque.

Si nous reprenons la relation (42)

$$x = m + x_0\varepsilon',$$

et si nous la différentions successivement, nous aurons

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dm}{dt} + \frac{d}{dt}(x_0\varepsilon'),$$

. . . . ,

$$\frac{d^{n+1}x}{dt^{n+1}} = \frac{d^{n+1}m}{dt^{n+1}} + \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}(x_0\varepsilon'),$$

. . . .

Cela nous montre, par conséquent, que *l'accélération d'ordre quelconque d'un point* X *de la figure se compose de l'accélération de même ordre d'un point* M *quelconque et de l'accélération que prendrait le point* X *si la figure tournait effectivement autour du point* M *avec les vitesses et accélérations angulaires successives du mouvement véritable.*

Si maintenant nous choisissons, pour le point M, le centre instantané Ω dans la première équation, le centre des accélérations U dans la seconde, le centre des suraccélérations U_2 dans la troisième, ..., le centre U_n des accélérations d'ordre n dans la $n+1^{\text{ième}}$, ce qui naturellement déplace chaque fois l'origine, les premiers termes des seconds membres disparaîtront, en vertu de la définition même des centres U_n.

Il ne nous restera plus que des formules de la forme

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \frac{d^n}{dt^n}(x_0 \varepsilon^{\lambda}). \tag{53}$$

Donc *l'accélération d'ordre quelconque* n, *en chaque point de la figure, est la même que si, la vitesse et les accélérations angulaires successives restant identiques, le mouvement se produisait effectivement autour du centre des accélérations du* $n^{\text{ième}}$ *ordre.*

Ce théorème est obtenu par M. Resal dans son *Traité de Cinématique* (p. 314), par une méthode peut-être un peu moins simple que celle-ci.

Problème.

21. *On a, sur un plan,* n *points mobiles* $X_1, X_2, \ldots, X_n$, *respectivement animés des vitesses* X_1V_1, X_2V_2, ..., X_nV_n. *Pour chacun d'eux, on construit le triangle* OAY *directement semblable à* OXV, OA *étant une droite* *fixe, de longueur donnée. Pour un point Z, ayant la vitesse* ZU, *on construit aussi le triangle* OAT, *directement semblable à* OZU. *Comment le point* Z *doit-il être déduit des points* $X_1, X_2, \ldots, X_n$, *pour que* T *soit à chaque instant le centre de gravité des points* $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$?

Ce problème fait l'objet de l'énoncé n° 72 de la *Nouvelle correspondance mathématique* (t. II, p. 63).

On le résout très-simplement en remarquant qu'on a

$$\frac{AY_p}{OA} = \frac{X_pV_p}{OX_p} = \frac{\frac{dx_p}{dt}}{x_p}, \quad AY_p = OA\,\frac{\frac{dx_p}{dt}}{x_p}.$$

De là

$$\Sigma AY_p = OA \sum \frac{\frac{dx_p}{dt}}{x_p}.$$

De même, nous avons

$$AT = OA\,\frac{\frac{dz}{dt}}{z}.$$

La condition que T soit le centre de gravité des points Y nous donne donc

$$n\,\frac{\frac{dz}{dt}}{z} = \frac{\frac{dx_1}{dt}}{x_1} + \frac{\frac{dx_2}{dt}}{x_2} + \ldots + \frac{\frac{dx_n}{dt}}{x_n}$$

ou

$$n\,\frac{dz}{z} = \frac{dx_1}{x_1} + \frac{dx_2}{x_2} + \ldots + \frac{dx_n}{x_n},$$

intégrant

$$n \log \frac{z}{c} = \log x_1 + \log x_2 + \ldots + \log x_n,$$

$$z = c \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

Ainsi le point Z doit se déduire de $X_1, X_2, \ldots, X_n$, de telle sorte que OZ soit la moyenne géométrique de OX_1, OX_2, ... (en grandeur et en direction), multipliée par une constante géométrique.