NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 464-479
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__464_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1194

(voir 2e série, t. XV, p. 144);

PAR A.-J.-J. MEYL,
Ancien capitaine d'artillerie, à La Haye.

Une pile de boulets à base triangulaire ne contient un nombre de boulets égal au carré d'un nombre entier que lorsqu'elle en contient sur le côté de la base 1, 2 *ou* 48.

Soit n le nombre de boulets d'un côté de la base, l'équation à résoudre sera $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = Q^2$. On supposera :

1° Que n est un nombre pair $2m$. L'équation devient

$\frac{2m(2m+1)(2m+2)}{6} = Q^2$, et, en écartant le facteur carré 4 du premier membre,

$$\frac{m(2m+1)(m+1)}{6} = Q^2.$$

Or, dans la solution de la question 1180 (2^e série, t. XVI, p. 429), M. E. Lucas a démontré que les seules valeurs en nombres entiers pour m, dans cette dernière équation, sont $m = 1$, $m = 24$. Par conséquent, on a $n = 2$, $n = 48$.

2° Que n est un nombre impair. Il y a trois cas à considérer selon que n, $n+1$ ou $n+2$ est divisible par 3. Pour plus de facilité, on remplacera n, dans ces trois cas respectivement, par $6m+3$, $6m-1$ et $6m+1$.

Soit n divisible par 3, d'où $n = 6m+3$. L'équation à résoudre est

$$(6m+3)(6m+4)(6m+5) = 6Q^2,$$

ou

$$(2m+1)(3m+2)(6m+5) = Q^2.$$

Les facteurs du premier membre étant premiers entre eux, on doit avoir

$$2m+1 = x^2, \quad 3m+2 = y^2, \quad 6m+5 = z^2;$$

des deux premières équations on tire

$$3x^2+1 = 2y^2,$$

équation impossible pour

$$y \equiv (-1, 0, +1) \pmod{3}.$$

Si $n+1$ est divisible par 3, on a $n = 6m-1$. L'équation devient

$$(6m-1)6m(6m+1) = 6Q^2,$$

et, comme plus haut,

$$6m - 1 = x^2,\quad 6m = 6y^2,\quad 6m + 1 = z^2,$$

les deux premières donnent

$$x^2 + 1 = 6y^2,$$

impossible pour

$$x \equiv -1,\ 0,\ +1\ (\text{mod. } 3).$$

Soit $n + 2$, divisible par 3, ou $n = 6m + 1$, on a l'équation

$$(6m + 1)(6m + 2)(6m + 3) = 6Q^2;$$

par conséquent,

$$6m + 1 = x^2,\quad 6m + 2 = 2y^2,\quad 6m + 3 = 3z^2;$$

d'où

$$(1)\qquad x^2 + 1 = 2y^2,\quad 2y^2 + 1 = 3z^2,\quad x^2 + 2 = 3z^2;$$

il s'ensuit

$$(2)\qquad 3z^2 = 4y^2 - x^2 = (2y + x)(2y - x).$$

Comme x, y et z sont premiers entre eux, les facteurs $2y + x$ et $2y - x$, dont la somme est $4y$ et la différence $2x$, ne peuvent avoir d'autre diviseur commun que 2 ; mais, x étant impair, ce diviseur n'existe pas; donc $2y + x$ et $2y - x$ sont premiers entre eux. On peut donc poser

$$z = pq,\quad 2y + x = 3p^2,\quad 2y - x = q^2.$$

Les valeurs de x, y et z, obtenues de ces équations et substituées dans une des équations (1), donnent l'équation

$$9p^4 - 18p^2q^2 + q^4 + 8 = 0;$$

en la résolvant par rapport à p^2, on a

$$p^2 = q^2 \pm \frac{2}{3}\sqrt{2(q^4-1)} = q^2 \pm \frac{2}{3}\sqrt{2(q^2+1)(q+1)(q-1)}.$$

Les facteurs sous le radical ne peuvent avoir d'autre diviseur commun que 2, puisque q, comme diviseur de l'impair z, est aussi impair. On peut donc mettre ce radical sous la forme

$$\sqrt{16 \times \frac{q^2+1}{2} \times \frac{q^2-1}{4}},$$

dont les facteurs $\frac{q^2+1}{2}$ et $\frac{q^2-1}{4}$ sont entiers et premiers entre eux.

Pour que p^2 soit rationnel, il faut que l'expression sous le radical soit un carré parfait, ou qu'elle s'annule; le premier cas est impossible, puisque q^2-1 n'est jamais un carré; le deuxième n'est possible que pour $q^2 = 1$. Par là, on a successivement $p^2 = q^2 = 1$, $x = y = z = 1$, $m = 0$ et enfin $n = 1$. Ainsi on ne peut trouver pour n que les valeurs 1, 2 et 48. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Note du rédacteur. — Les facteurs $2y+x$, $2y-x$ du second membre de l'équation (2)

$$3z^2 = (2y+x)(2y-x)$$

étant premiers entre eux, on a

$$z = pq, \quad 2y+x = 3p^2, \quad 2y-x = q^2,$$

ou

$$z = pq, \quad 2y+x = p^2, \quad 2y-x = 3q^2;$$

mais cette seconde hypothèse conduit au même résultat que la première.

La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1251

(voir 2^e série, t. XVI, p. 384);

PAR M. S. REALIS.

L'expression $6xy(3x^4+y^4)$, *dans laquelle* x *et* y *sont des entiers différents de zéro, ne peut jamais représenter un cube, ni le quadruple d'un cube.*

Soit, s'il est possible,

$$6xy(3x^4+y^4) = 2^m z^3,$$

x, y, z étant des entiers différents de zéro, et m étant égal à zéro ou à 2.

On a, par identité,

$$[6xy(3x^4+y^4)]^2 = X^3 + Y^3,$$

où

$$X = 3x^4 + 6x^2y^2 - y^4,$$
$$Y = -3x^4 + 6x^2y^2 + y^4.$$

Il s'ensuivrait donc

$$(2^m z^3)^2 = X^3 + Y^3,$$

c'est-à-dire

$$2^{2m}(z^2)^3 = X^3 + Y^3,$$

équation impossible, pour $m=0$ ou $m=2$, quels que soient les signes des nombres entiers X et Y (*). (EULER, *Analyse indéterminée*, § 243 et § 247.)

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc et Lucas.

(*) *L'équation* $x^3+y^3=2^m z^3$ *est impossible en nombres entiers pour toute valeur de* m (LEGENDRE, *Théorie des nombres*, éd. de 1830, t. II, p. 9). Par conséquent, d'après l'identité

$$[6xy(3x^4+y^4)]^2 = X^3+Y^3,$$

l'équation $6xy(3x^4+y^4)=2^m z^3$ est. de même, impossible pour toute valeur entière de m. (G.)

Question 1261

(voir 2e série, t. XVII, p. 279);

Par M. MICHEL.

On prend un point A *sur un diamètre fixe d'une circonférence donnée; soit* ABC *le triangle isoscèle d'aire maximum, tel que* B, C *soient des points de la circonférence donnée, et que* BC *soit perpendiculaire sur le diamètre passant par* A. *Trouver l'enveloppe de la droite* AB *quand* A *se meut sur le diamètre fixe.*

(Lemoine.)

Soient O le centre de la circonférence donnée; D le point d'intersection du diamètre fixe et de la base BC du triangle ABC (*).

En posant $OD = x$, $AO = a$, $OB = r$, la surface du triangle aura pour expression

$$(a + x)\sqrt{r^2 - x^2}.$$

On trouve facilement que cette surface est maximum, quand

$$r^2 - x^2 = x(a + x),$$

c'est-à-dire quand $\overline{BD}^2 = DO \times DA$. Il en résulte immédiatement que l'angle $BOD = ABD$ (**).

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

(**) Cela étant, decrivez du point B comme centre, avec BO pour rayon, une circonférence qui rencontrera la droite AB et son prolongement en des points G, H, et tirez les deux droites rectangulaires OG, OH. Ces droites resteront invariables dans le mouvement supposé au point A, parce que les angles GOA, HOD, qu'elles forment, au point O, avec le diamètre fixe OA, de différents côtes de ce diamètre, sont constamment égaux, chacun, à 45 degrés. En effet, l'egalite BOD = ABD

Actuellement, abaissons du point O une perpendiculaire OE sur AB ; soient $OE = p$, et l'angle $EOD = \alpha$.

En prenant pour axes de coordonnées le diamètre fixe donné et le diamètre perpendiculaire, l'équation de la droite AB est

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p.$$

On a d'ailleurs

$$p = r\cos BOE = -\, r\cos 2\alpha,$$

et l'équation de AB devient

$$(1) \qquad x\cos\alpha + y\sin\alpha = -\, r\cos 2\alpha;$$

sa dérivée par rapport à α est

$$(2) \qquad -\,x\sin\alpha + y\cos\alpha = 2r\sin 2\alpha.$$

L'élimination de α entre les équations (1) et (2), donnera l'équation du lieu cherché.

---

donne

$$ABO + BAO = \frac{\pi}{2} - BAO,$$

$$ABO = \frac{\pi}{2} - 2\,BAO = \frac{\pi}{2} - 2\,GAO.$$

Mais l'angle ABO, ou GBO, étant l'angle au sommet du triangle isoscèle BGO, on a

$$ABO = \pi - 2\,BGO;$$

donc

$$\frac{\pi}{2} - 2\,GAO = \pi - 2\,BGO;$$

d'où

$$BGO = \frac{\pi}{4} + GAO = GOA + GAO,$$

$$GOA = \frac{\pi}{4} = 45^\circ, \quad \text{et} \quad HOD = 45^\circ.$$

Par conséquent, la question proposée revient à trouver l'enveloppe d'une droite GH, de longueur constante, 2.OB, dont les extrémités G et H glissent sur deux droites fixes rectangulaires OG, OH. Ce qui est une question dont la solution est bien connue. (G.)

De ces équations on tire

$$(x+y)^2 = r^2(1-\sin 2\alpha)^3,$$
$$(x-y)^2 = r^2(1+\sin 2\alpha)^3,$$

et par suite

$$(3) \qquad \sqrt[3]{(x+y)^2} + \sqrt[3]{(x-y)^2} = 2\sqrt[3]{r^2} \ (^*).$$

Note. — Autre solution de M. Barbarin.

Question 1265

(voir 2e série, t. XVII, p. 240);

PAR M. MORET-BLANC.

Le centre d'un cercle O *de rayon constant se déplace dans son plan sur la circonférence d'un cercle fixe* O'. *Trouver l'enveloppe des polaires d'un point fixe* P *par rapport au cercle* O. (LAISANT.)

Solution analytique. — Je prends le centre du cercle fixe pour origine des coordonnées rectangulaires, et je fais passer l'axe $O'x$ par le point P. Soient a' et a les rayons du cercle fixe et du cercle mobile, et α l'abscisse du point P.

Les coordonnées du point O étant $a'\cos\theta$, $a'\sin\theta$, l'équation du cercle O sera

$$(x - a'\cos\theta)^2 + (y - a'\sin\theta)^2 = a^2,$$

ou

$$x^2 + y^2 - 2a'x\cos\theta - 2a'y\sin\theta + a'^2 - a^2 = 0,$$

et celle de la polaire du point P par rapport à ce cercle,

$$\alpha x - a'(x+\alpha)\cos\theta - a'y\sin\theta + a'^2 - a^2 = 0,$$

(*) En prenant pour nouveaux axes de coordonnées les bissectrices des angles des anciens axes, l'équation (3) se réduit à $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (2r)^{\frac{2}{3}}$.

ou

$$(1) \qquad a'(x+\alpha)\cos\theta + a'y\sin\theta = \alpha x + a'^2 - a^2.$$

On obtiendra l'équation de son enveloppe en éliminant θ entre cette équation et sa dérivée par rapport à θ

$$(2) \qquad -a'(x+\alpha)\sin\theta + a'y\cos\theta = 0.$$

En ajoutant membre à membre ces deux équations élevées au carré, l'élimination se trouve faite, et l'on a

$$a'^2(x+\alpha)^2 + a'^2y^2 = (\alpha x + a'^2 - a^2)^2,$$

ou

$$(3) \quad (a'^2-\alpha^2)x^2 + a'^2y^2 + 2a^2\alpha x + a'^2\alpha^2 - (a'^2-a^2)^2 = 0.$$

L'enveloppe est une conique symétrique par rapport à O'P. La conique est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que le point P est dans le cercle O', sur la circonférence, ou extérieur au cercle. Si P coïncide avec O', le lieu est une circonférence concentrique à la circonférence O'.

Solution géométrique. — Toute droite issue du point P rencontre le cercle O' en deux points réels ou imaginaires, d'où résultent deux cercles O, et par suite deux polaires parallèles, réelles ou imaginaires. L'enveloppe des polaires est donc une courbe telle que d'un point quelconque de l'infini on peut lui mener deux tangentes réelles ou imaginaires : elle est de seconde classe, et par conséquent une conique.

Si le point P est à l'intérieur du cercle O', l'enveloppe a des tangentes reelles parallèles à toutes les directions : c'est une ellipse, qui se réduit à un cercle lorsque P coïncide avec O'.

Si le point P est extérieur au cercle O', les tangentes réelles de l'enveloppe sont perpendiculaires aux droites menées de P dans l'angle TPT' des tangentes au cercle O' : cette enveloppe est donc une hyperbole dont les asymptotes sont perpendiculaires aux droites PT, PT'. Si le point P est sur la circonférence O', l'enveloppe n'a qu'une seule tangente à distance finie parallèle à chaque direction, et elle est tangente à la droite de l'infini : c'est une parabole.

Dans tous les cas, l'axe O'P est l'axe focal.

Note. — La même question a été résolue par MM. Ferdinando Pisani; C. Jugane, etudiant en droit, à Paris; E. Fauquembergue, maitre répétiteur au lycée de Saint-Quentin; Armand Bertrand, propriétaire à Azillanet; Droz; Lez; Ed. Guillet; Lambiotte; Beaugey; B. Robaglia (à Philippeville); J. Chambon; Albert Lacazette et Numa Parra, élèves au lycée de Bordeaux.

La solution de M. Droz est entièrement géométrique.

M. Bertrand resout cette question plus genérale, dont les questions 1211 et 1265, sont des cas particuliers :

« *On donne sur un plan un point fixe* P *et deux cercles* O, A. *Une circonférence* O', *variable, dont le centre est situé sur la circonférence* O, *coupe orthogonalement le cercle* A; *déterminer l'enveloppe de la polaire du point* P, *par rapport à* O'. »

Question 1271

(voir 2e série, t. XVII, p. 288);

PAR M. ALBERT LACAZETTE,

Élève du lycee de Bordeaux.

On donne un plan (P) *et une droite fixe* (D) *qui rencontre le plan en un point* O. *Par la droite* (D), *on mène un plan* (π) *qui coupe* (P) *suivant une droite* Om : *on élève sur* Om, *dans le plan* (π), *une perpendiculaire* Oμ ; *quel est le lieu de cette perpendiculaire ?*

(GENTY.)

Solution géométrique. — Toutes les droites dont on cherche le lieu passant par un point fixe O, le lieu est un cône.

Et l'on peut voir que tout plan parallèle au plan (P) coupe ce cône suivant un cercle.

En effet, une génératrice $O\mu$ du cône est donnée par l'intersection du plan (π) et d'un plan perpendiculaire à la droite Om, au point O. Les traces du plan (π) et du plan perpendiculaire à Om sur le plan (P) sont des droites rectangulaires Om, Om'; et il en sera de même des traces de ces deux plans sur tout plan (P'), parallèle à (P). Donc, en nommant α, μ et s les points auxquels le plan (P') est rencontré par les droites (D), $O\mu$, et par la perpendiculaire Os, élevée au plan (P), au point O; l'angle $s\mu\alpha$ sera droit. Par conséquent, la section du cône par un plan (P') parallèle au plan (P) est le lieu du sommet d'un angle droit dont les côtés passent par deux points fixes α et s, c'est-à-dire un cercle ayant αs pour diamètre.

Solution analytique. — Je prends pour axes des coordonnées trois droites rectangulaires; la droite (D) dans le plan des axes xz, et le plan des xy étant le plan (P), par suite, le point O est l'origine.

Les équations de la droite (D) seront $y = 0$, $x = mz$; et l'équation d'un plan (π), $y + \lambda(x - mz) = 0$. La droite Om sera représentée par $z = 0$, $y + \lambda x = 0$.

L'équation du plan perpendiculaire à Om, au point O, sera $\lambda y = x$, et une droite du lieu aura pour équations

$$\lambda y = x, \quad y + \lambda(x - mz) = 0.$$

En éliminant λ, on a $y^2 + x^2 - mxz = 0$; équation d'un cône qui admet pour génératrices la droite (D) et l'axe des z. L'une des directions des plans cycliques de ce cône est parallèle au plan donné (P) [*].

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; A. Droz; Fauquembergue; Lambiotte; Lez; J. Chambon; Numa Parra, élève du lycée de Bordeaux.

Question 1273

(voir 2e série, t. XVII, p. 288);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE,
Maître répetiteur au lycee de Saint-Quentin.

Si r représente le rayon du cercle inscrit dans un triangle, et p le demi-périmètre, on a $p^2 > 27r^2$.

(D. EDWARDS.)

On a

$$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p};$$

la question revient donc à démontrer que

$$p^3 > 27(p-a)(p-b)(p-c),$$

ou

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 > (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c).$$

Or on sait (*Questions d'Algèbre* de M. Desboves) que l'on a

$$abc > (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c),$$

et

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 > abc;$$

(*) Et l'autre perpendiculaire à la droite (D).

donc, *a fortiori*,

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 > (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c).$$

C. Q. F. D.

Note. — M. Fauquembergue donne une seconde démonstration fondée sur cette proposition connue, que :

De tous les triangles circonscrits à un même cercle, celui qui a le plus petit périmètre est équilatéral.

La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc, Sondat; Ferdinando Pisani; Eugène Delmas, elève du lycée de Lyon.

Question 1274

(voir 2e série, t. XVII, p. 288);

PAR M. J. DE VIRIEU,

Professeur à Lyon.

Dans toute solution en nombres entiers de l'équation indéterminée $24x^2 + 1 = y^2$, *le produit* xy *des valeurs des inconnues est toujours un multiple de* 5.

x, y étant des entiers qu'on peut supposer positifs, le chiffre des unités est un des chiffres suivants :

Dans x^2.	0, 1, 4, 5, 6, 9;
Dans $24x^2$..........	0, 4, 6, 0, 4, 6;
Dans $24x^2+1$ ou y^2..	1, 5, 7, 1, 5, 7;

mais le chiffre des unités d'un entier qui est un carré parfait ne peut être 7; donc le chiffre des unités de y^2 est 5 ou 1.

Dans le premier cas, le chiffre des unités de y est 5; y est donc multiple de 5.

Dans le second cas, le tableau ci-dessus montre que le chiffre des unités de x^2, et par suite de x, est 0 ou 5; x est encore multiple de 5.

Des deux valeurs correspondantes de x et de y, il y en a toujours une et une seule qui est un multiple de 5; leur produit est donc un multiple de 5.

Note. — Autres solutions de MM. Réalis; Moret-Blanc; Sondat.

Question 1276

(voir 2e série, t. XVII, p. 336);

PAR M. R.-W. GENESE.

Soient ABC *un triangle et* O *un point quelconque du plan; démontrer que la puissance de* O, *par rapport au cercle circonscrit au triangle, a pour expression*

$$\frac{a^2.\mathrm{OCB} + b^2.\mathrm{OAC} + c^2.\mathrm{OBA}}{\mathrm{ABC}},$$

a, b, c *étant les longueurs des trois droites* OA, OB, OC, *et les aires* OCB, ... *recevant des signes convenables, suivant le sens dans lequel elles sont parcourues.*

(LAISANT.)

Le point O est le centre de gravité de trois poids posés aux points A, B, C, et proportionnels, respectivement, aux aires BOC, COA, AOB (auxquelles il faut donner des signes convenables).

Le moment d'inertie de ces poids, par rapport au centre S du cercle circonscrit au triangle ABC, est égal à

$$\mathrm{BOC} \times \mathrm{OA}^2 + \mathrm{COA} \times \mathrm{OB}^2 + \mathrm{AOB} \times \mathrm{OC}^2 + \mathrm{ABC} \times \mathrm{OS}^2;$$

mais ce moment a aussi pour valeur

$$\mathrm{BOC} \times \mathrm{SA}^2 + \mathrm{COA} \times \mathrm{SB}^2 + \mathrm{AOB} \times \mathrm{SC}^2, \quad \text{ou} \quad \mathrm{ABC} \times \mathrm{R}^2,$$

en désignant par R le rayon du cercle; donc

$$\mathrm{BOC} \times \mathrm{OA}^2 + \mathrm{COA} \times \mathrm{OB}^2 + \mathrm{AOB} \times \mathrm{OC}^2 = \mathrm{ABC}(\mathrm{R}^2 - \mathrm{OS}^2);$$

le théorème est donc démontré.

Question 1276
(Seconde solution);

Par M. H. LEZ.

Le cercle, passant par trois points A, B, C, a pour équation générale

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant ce déterminant, on peut le mettre sous une forme qui rappelle le théorème de Feuerbach :

$$(x^2+y^2)\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} - (x_1^2+y_1^2)\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-(x_2^2+y_2^2)\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} - (x_3^2+y_3^2)\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Or, si l'on remplace les coordonnées courantes par celles d'un point quelconque $D(\alpha, \beta)$ et qu'on divise par le coefficient de x^2, on aura la puissance P de ce point par rapport au cercle circonscrit au triangle ABC. De plus, si ce point se confond avec l'origine variable O des coordonnées choisies arbitrairement, on aura tout de suite

$$\mathrm{P}.\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_1^2+y_1^2)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x^2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+(x_2^2+y_2^2)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} + (x_3^2+y_3^2)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix},$$

ce qui démontre le théorème proposé.

Note. — La question 1276 a aussi été résolue par MM. Moret-Blanc et Ferdinando Pisani.

Au sujet de cette même question, M. H Faure nous écrit :

« Dans mon recueil de théorèmes, relatif aux sections coniques, figure l'énoncé suivant (page 11) : On donne deux cercles A, B et trois points a, b, c sur le premier. Si l'on désigne par α, β, γ les puissances de ces points, par rapport au cercle B ; par μ et μ' les puissances d'un point arbitraire m, par rapport aux cercles B, A, on a la relation

$$\alpha . mbc + 6 . mca + \gamma . mab = abc(\mu - \mu').$$

Or, si l'on suppose que le cercle B se reduise à un point et que l'on prenne le point m pour ce point, on obtient le théorème 1276, énoncé par M. Laisant. J'ajoute que mon théorème s'étend au cas de deux sphères A et B, *en prenant sur la première quatre points arbitraires.*