NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. HAILLECOURT

Foyers des surfaces du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 457-461

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__457_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

FOYERS DES SURFACES DU SECOND ORDRE;

PAR M. A. HAILLECOURT,

Agrégé de l'Université, Inspecteur honoraire d'Académie.

LEMME. — *Pour que le polynôme*

$$\begin{aligned} &ax^2 + a'y^2 + a''z^2 \\ &\quad + 2byz + 2b'zx + 2b''xy + 2cx + 2c'y + 2c''z + d \end{aligned}$$

soit carré parfait, les conditions nécessaires et suffisantes sont

$$ab = b'b'', \quad a'b' = b''b, \quad a''b'' = bb', \quad bc = b'c' = b''c'',$$
$$3bb'b''d = bc.b'c' + b'c'.b''c'' + b''c''.bc.$$

Pour que (x, y, z) soit foyer de la surface

$$\begin{aligned} &AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX \\ &\quad + 2B''XY + 2CX + 2C'Y + 2C''Z + D = 0, \end{aligned}$$

il faut que

$$\begin{aligned} &(A - s)X^2 + (A' - s)Y^2 + (A'' - s)Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX \\ &\quad + 2B''XY + 2(C + sx)X + 2(C' + sy)Y \\ &\quad + 2(C'' + sz)Z + D - s(x^2 + y^2 + z^2) \end{aligned}$$

soit carré parfait.

Le lemme donne donc pour équations de condition

$$(1)\quad (A - s)B = B'B'',\ (A' - s)B' = B''B,\ (A'' - s)B' = BB'.$$

$$(2)\quad B(C + sx) = B'(C' + sy) = B''(C'' + sz).$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &3BB'B''s(x^2 + y^2 + z^2)\\ &\quad + BB'(C + sx)(C' + sy)\\ &\quad + B'B''(C' + sy)(C'' + sz)\\ &\quad + B''B(C'' + sz)(C + sx) = 3BB'B''D. \end{aligned}\right.$$

Comme de (1) on tire

$$(4)\quad A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{B''B}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''} = s,$$

on voit que la surface est de révolution et que la valeur de s est la racine double de l'*équation en* s. Désignons-la par s_0, et par s_1 la racine simple. De là

$$(\sigma)\quad s_1 = A + A' + A'' - 2s_0 = \frac{B'B''}{B} + \frac{B''B}{B'} + \frac{BB'}{B''} + s_0.$$

PREMIER CAS. — *Surfaces douées d'un centre.*

En transportant l'origine au centre (α, β, γ), ce qui donne pour terme tout connu

$$D_1 = D + C\alpha + C'\beta + C''\gamma,$$

les équations (2) et (3) se réduisent respectivement à

$$(5)\quad Bx_1 = B'y_1 = B''z_1,$$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &3BB'B''s_0(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)\\ &\quad + s_0^2(B'B''y_1z_1 + B''Bz_1x_1 + BB'x_1y_1) = 3BB'B''D_1, \end{aligned}\right.$$

d'où

$$Bx_1 = B'y_1 = B''z_1 = \pm\sqrt{\frac{BB'B''D_1}{s_0\left(s_0 + \dfrac{B'B''}{B} + \dfrac{B''B}{B'} + \dfrac{BB'}{B''}\right)}}.$$

En ayant égard à l'équation (σ), on a donc, pour les équations du foyer,

$$\text{(F)}\quad B(x-\alpha)=B'(y-\beta)=B''(z-\gamma)=\pm\sqrt{\frac{BB'B''D_1}{s_1 s_0}}.$$

$BB'B''$ est de même signe que

$$\frac{B'B''}{B}+\frac{B''B}{B'}+\frac{BB'}{B''}=s_1-s_0;$$

la quantité sous le radical a donc le signe de

$$\frac{(s_1-s_0)D_1}{s_1 s_0}.$$

Cette remarque suffit pour prouver que :

1° L'hyperboloïde de révolution à une nappe n'a pas de foyer;

2° L'hyperboloïde de révolution à deux nappes a deux foyers, situés sur l'axe transverse;

3° L'ellipsoïde de révolution autour de son grand axe a deux foyers, situés sur cet axe.

Second cas. — *Paraboloïde elliptique.*

En introduisant une inconnue auxiliaire t, de (2) on tire

$$(7)\qquad \frac{x+\dfrac{C}{s_0}}{\left(\dfrac{1}{B}\right)}=\frac{y+\dfrac{C'}{s_0}}{\left(\dfrac{1}{B'}\right)}=\frac{z+\dfrac{C''}{s_0}}{\left(\dfrac{1}{B''}\right)}=t.$$

Éliminons x, y, z entre (7) et (3). Le coefficient de t^2 est

$$3BB'B''s_0\left(\frac{1}{B^2}+\frac{1}{B'^2}+\frac{1}{B''^2}\right)+3s_0^2$$
$$=3s_0\left(\frac{B'B''}{B}+\frac{B''B}{B'}+\frac{BB'}{B''}\right)=3s_0 s_1.$$

Mais ici $s_1=0$. L'équation en t tombe donc au premier degré. Elle donne

$$t = \frac{1}{2s_0}\,\frac{C^2 + C'^2 + C''^2 - Ds_0}{\frac{C}{B} + \frac{C'}{B'} + \frac{C''}{B''}},$$

d'où, pour les équations du foyer,

$$(\mathrm{F})\qquad \left\{\begin{aligned} &B(s_0 x + C) = B'(s_0 y + C') = B''(s_0 z + C'')\\ &\qquad = \frac{1}{2}\,\frac{C^2 + C'^2 + C''^2 - Ds_0}{\frac{C}{B} + \frac{C'}{B'} + \frac{C''}{B''}}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on remplace D par $D + sr^2$, c'est qu'au lieu d'un foyer on cherche une *sphère focale* de rayon r. Une discussion, qui ne présente pas de difficulté sérieuse, montre que :

1° Tout parallèle d'un hyperboloïde de révolution à une nappe est la courbe de contact d'une sphère focale avec la surface.

2° Tout point pris sur l'axe transverse de l'hyperboloïde de révolution à deux nappes, mais non situé entre les foyers, est le centre d'une sphère focale enveloppée par la surface. Il en est de même de tout point situé entre les foyers d'un ellipsoïde de révolution autour de son grand axe. Pour le paraboloïde elliptique, il en est encore de même de tout point de l'axe situé au delà du foyer par rapport au sommet.

3° Si l'ellipsoïde est de révolution autour de son petit axe, tout point de cet axe est le centre d'une sphère enveloppant la surface, et telle que la puissance, par rapport à la sphère d'un point quelconque de l'ellipsoïde, est, en grandeur absolue, le carré d'une fonction linéaire de ses coordonnées. C'est ce qu'on pourrait appeler *une sphère focale à puissance négative*.

Scolie. — Pour les courbes du second ordre, la même méthode conduit, simplement aussi, à des expressions qui fournissent les coordonnées des foyers; mais, dans ces expressions, il y a des radicaux dont le signe doit être déterminé dans chaque cas particulier.