NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 429-432

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__429_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 140

(voir 1re série, t. VI, p. 140);

PAR M. H. BROCARD.

En projetant cylindriquement deux hyperboles conjuguées sur un plan, les projections sont des hyperboles CONJUGUÉES. *Mais que deviennent les hyperboles conjuguées en les projetant* CONIQUEMENT *sur un plan?*

Soient, dans un plan P, deux hyperboles conjuguées admettant pour asymptotes communes les droites AOA′, BOB′. Soit S le sommet du cône. Par ce point faisons passer un plan M parallèle au plan N sur lequel nous cherchons la trace du cône. Ce plan M renfermera quatre génératrices du cône SC, SD, SE, SF, parallèles au plan N. Dans ces quatre directions il existe, à l'infini sur le plan N, un point de la section. Celle-ci se compose donc de deux hyperboles ayant quatre asymptotes parallèles aux quatre directions indiquées ci-dessus. Leurs centres sont différents, car les projections coniques des diamètres cessent d'être des diamètres des projections des courbes; ainsi les hyperboles ne sont plus conjuguées. Quant aux plans passant par le sommet S et les deux asymptotes AOA′, BOB′, leurs traces sur le plan N ne sont plus des asymptotes aux hyperboles trouvées; ce sont simplement des droites qui, évidemment, ne les rencontrent pas.

Question 1255

(voir 2e série, t. XVII, p. 237);

PAR M. EUGÈNE DELMAS,
Élève du lycée de Lyon.

D'un point M *on mène des parallèles aux côtés d'un triangle* ABC, *qui rencontrent respectivement les deux autres côtés en des points* a, α; b, β; c, γ : *démontrer que la somme*

$$\mathrm{M}a\mathrm{M}\alpha + \mathrm{M}b\mathrm{M}\beta + \mathrm{M}c\mathrm{M}\gamma$$

est égale à la puissance du point M, *par rapport au cercle circonscrit au triangle.*

H. SCHRÖTER.

En prenant pour triangle de référence le triangle ABC, le point M est défini par les longueurs α', β', γ' des perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés BC, AC, AB.

On a, d'une part, les relations

$$Ma = \frac{\gamma'}{\sin B}, \quad M\alpha = \frac{\beta'}{\sin C},$$

$$Mb = \frac{\alpha'}{\sin C}, \quad M\beta = \frac{\gamma'}{\sin A},$$

$$Mc = \frac{\beta'}{\sin A}; \quad M\gamma = \frac{\alpha'}{\sin B}.$$

Il s'ensuit

$$MaM\alpha + MbM\beta + McM\gamma = \frac{\beta'\gamma'}{\sin B \sin C} + \frac{\alpha'\gamma'}{\sin C \sin A} + \frac{\beta'\alpha'}{\sin A \sin B}.$$

D'autre part, lorsque, dans l'équation

$$\beta\gamma \sin A + \alpha\gamma \sin B + \alpha\beta \sin C = 0$$

du cercle circonscrit au triangle de référence, on rempace α, β, γ par α', β', γ', le premier membre représente, en valeur absolue, le produit de $\sin A . \sin B . \sin C$, par le carré de la tangente menée au cercle par le point M (*); donc la puissance du point M est, en valeur absolue,

$$\frac{\beta'\gamma'}{\sin B \sin C} + \frac{\alpha'\gamma'}{\sin C \sin A} + \frac{\beta'\alpha'}{\sin A \sin B}$$

ou

$$MaM\alpha + MbM\beta + McM\gamma. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Franchy, maître répétiteur au lycée de Moulins; E. Fauquembergue, maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin; Moret-Blanc; Droz; Guillet; Barbarin; Kœnigs,

(*) SALMON. *Coniques*, 4ᵉ édition, p. 125, nᵒ 132.

élève à l'école de l'Immaculée-Conception, à Toulouse, Michel, Armand Bertrand, propriétaire à Azillanet, J. Chambon, Michel.

M. Bertrand fait observer qu'en nommant S la surface du triangle qui a pour sommets les pieds des perpendiculaires abaissées du point M sur les côtés du triangle ABC, la puissance du point M, par rapport au cercle circonscrit, a pour expression $\frac{2S}{\sin A \sin B \sin C}$.