Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 426-428

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__426_1>

CORRESPONDANCE.

1. *Lettre de M. Hilaire, Professeur à Douai.* — Permettez-moi de vous communiquer quelques observations sur le problème donné en Mathématiques élémentaires au Concours général de 1877, et dont je trouve une solution (p. 213) (*).

Je remarque d'abord que le centre de l'ellipse est évidemment le point du plan bissecteur qui a le point p pour projection orthogonale sur le plan P : donc ce point ne se confond avec le point a que quand la droite Aa est perpendiculaire à la fois au plan bissecteur et au

(*) La seconde solution (page 268) n'était pas encore publiée lorsque nous avons reçu la lettre de M. Hilaire.

plan P, c'est-à-dire quand les plans P et P′ sont parallèles.

Je vais montrer ensuite que la question tout entière est une application immédiate des propriétés focales dans les surfaces du second degré.

En effet, les points C appartiennent au lieu des points équidistants du point A et du plan P : ce lieu est un paraboloïde de révolution, ayant pour foyer le point A, pour axe la perpendiculaire menée du point A sur le plan P, et pour sommet le point situé sur cet axe, à égale distance du point A et du plan P : l'ellipse est précisément la section de ce paraboloïde par le plan bissecteur.

Or, d'après un théorème connu (*voir*, par exemple, SALMON, *Géométrie à trois dimensions*), le cône, ayant pour sommet un foyer d'une surface de révolution et pour base une section plane quelconque de cette surface, est lui-même de révolution, et il a pour axe la droite joignant le foyer au pôle du plan de la section.

Il résulte de là que le cône formé par les droites AC est *toujours* de révolution.

Quant au fait que l'ellipse se projette suivant un cercle sur le plan P, il se rattache aux mêmes propriétés. Pour le faire voir, il suffit d'appliquer le théorème précédent au foyer situé à l'infini sur l'axe du paraboloïde. Le cône, dont le sommet s'éloigne à l'infini, devient un cylindre.

L'axe de ce cylindre de révolution joint toujours le foyer au pôle du plan de la section ; mais, d'une part, le foyer est à l'infini sur l'axe du paraboloïde, et, d'autre part, le pôle, qui doit toujours se trouver sur le diamètre conjugué du plan, est sur une parallèle à l'axe du paraboloïde. Donc l'axe du cylindre se confond avec ce diamètre du paraboloïde ; par suite il est perpendiculaire au plan P, et le plan P doit couper le cylindre suivant un cercle.

2. Les questions 1225, 1230, 1235, 1251, 1254 ont été résolues par MM. Dunoyer, Pisani, Lez, S. K., à Vienne, N. Androwski, à Varsovie.