NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉDOUARD LUCAS

Sur l'équation indéterminée $X^3 + Y^3 = AZ^3$

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 425-426

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__425_0>

SUR L'ÉQUATION INDETERMINÉE $X^3 + Y^3 = AZ^3$;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

On a le théorème suivant :

Pour que l'équation proposée soit vérifiée par des valeurs entières de X, Y, Z, A, *il faut et il suffit que* A *appartienne à la forme* $xy(x+y)$ *préalablement débarrassée de ses facteurs cubiques.*

En effet, on a l'identité

$$[x^3 - y^3 + 6x^2y + 3xy^2]^3 + [y^3 - x^3 + 6y^2x + 3yx^2]^3$$
$$= xy(x+y).3^3[x^2 + xy + y^2]^3,$$

et l'on résout l'équation proposée, par les valeurs

$$X = x^3 - y^3 + 6x^2y + 3xy^2,$$
$$Y = y^3 - x^3 + 6y^2x + 3yx^2,$$
$$Z = 3(x^2 + xy + y^2),$$
$$A = xy(x+y).$$

Réciproquement, si l'équation est vérifiée pour les valeurs x_0, y_0, z_0 des variables, et si l'on pose

$$x = x_0^3, \quad y = y_0^3,$$

on a

$$xy(x+y) = A(x_0y_0z_0)^3.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. Il résulte encore de l'identité précédente que toute solution de l'équation proposée conduit à une série indéfinie de solutions nouvelles, en supposant A constant. Il faut excepter le cas de $x = \pm y$.

Exemple. — Pour $x = 1, y = 2$, on a la solution

$$17^3 + 37^3 = 6.21^3;$$

de laquelle on déduit une série indéfinie d'autres solutions. On observera ainsi que l'équation

$$x^3 + y^3 = 6z^3$$

a une infinité de solutions, bien que Legendre ait affirmé le contraire. On peut aussi trouver d'autres identités, en nombre illimité, et ainsi la suivante :

$$\begin{aligned}[x^3 + 3x^2y - y^3]^3 + [3xy(x+y)]^3 \\ = [x^3 + 6x^2y + 3xy^2 - y^3][x^2 + xy + y^2]^3,\end{aligned}$$

de laquelle il résulte que le polynôme

$$x^3 + 6x^2y + 3xy^2 - y^3$$

n'est jamais égal au cube d'un nombre entier, ni à son double, à son triple, à son quadruple ou à son quintuple.