GAMBEY

Solution de la question de mathématiques spéciales proposée au concours d'agrégation en 1876

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 414-418

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__414_0>

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1876;

Par M. GAMBEY.

On donne une parabole P *et un point* H *dont la projection orthogonale sur le plan de la courbe se fait au sommet de cette parabole :*

1° *Trouver l'équation générale des surfaces de révolution du second ordre qui passent par la parabole* P *et par le point* H;

2° *Déterminer le nombre de celles de ces surfaces dont l'axe passe par un point* A *donné dans le plan* Q, *qui contient le point* H *et l'axe de la parabole* P.

Classer les mêmes surfaces quand le point A *se meut dans le plan* Q.

Prenons pour origine des coordonnées le sommet de la parabole, pour axe des z la projetante du point H, et pour plan des xy le plan de la parabole, dans lequel elle sera rapportée à son axe et à la tangente au sommet; de sorte que ses équations seront

$$z = 0, \quad y^2 - 2px = 0.$$

Soit $2h$ la distance du point H au sommet de la parabole.

L'équation générale des surfaces de révolution

$$(1) \qquad (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2 - (\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta)^2 = 0$$

devra satisfaire aux conditions suivantes :

$$\alpha^2 = 1, \quad \beta = 0, \quad a + \alpha\delta = p, \quad b = 0,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 - r^2 - \delta^2 = 0, \quad h(1-\gamma^2) = c + \gamma\delta.$$

L'équation (1) devient alors, en prenant $\alpha = +1$,

(2) $y^2 + (1-\gamma^2)z^2 - 2\gamma xz - 2px - 2h(1-\gamma^2)z = 0.$

Les coordonnées du centre de la sphère

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2 = 0$$

devant satisfaire constamment aux équations

$$b = 0, \quad c - \gamma(a-p) - h(1-\gamma^2) = 0,$$

quel que soit γ, il s'ensuit que les équations de l'axe de révolution des surfaces (2) sont

(3) $$y = 0, \quad z - \gamma(x-p) - h(1-\gamma^2) = 0.$$

Remarquons tout de suite que la valeur $\alpha = -1$ n'a d'autre effet que de faire changer le signe de γ dans les équations (2) et (3). Il est donc inutile de la considérer.

Soient x_0, o, z_0 les coordonnées du point A. L'axe de révolution des surfaces (2) devant passer en A, on aura

$$z_0 - \gamma(x_0 - p) - h(1-\gamma^2) = 0,$$

ou, en ordonnant par rapport à γ,

$$h\gamma^2 - (x_0 - p)\gamma + z_0 - h = 0.$$

Cette équation détermine deux valeurs de γ en fonction des coordonnées du point A. Ces valeurs seront réelles si l'on a

$$(x_0 - p)^2 - 4h(z_0 - h) \geq 0;$$

donc, si le point A est extérieur à la parabole

$$(x-p)^2 - 4h(z-h) = 0,$$

il y a *deux* surfaces de révolution dont l'axe passe en A; il n'y en a plus qu'*une* si ce point est sur la parabole.

Enfin, pour tout point intérieur à cette même parabole, les surfaces de révolution sont imaginaires.

La parabole qui limite ainsi les régions où les surfaces sont réelles est l'*enveloppe* des axes de révolution de ces surfaces. Elle a son axe parallèle à l'axe des z, et elle est tangente en son sommet à la droite $z - h = 0$.

Si l'on écrit ainsi son équation dans le plan des xz,

$$(z - 2h)^2 + (x + z - p)(x - z - p) = 0,$$

on voit encore qu'elle est tangente aux deux droites

$$x + z - p = 0, \quad x - z - p = 0,$$

les points de contact étant sur la droite

$$z - 2h = 0,$$

et ayant pour abscisses $p - 2h$ et $p + 2h$.

En faisant $y = 0$ dans l'équation (2), on obtient la section méridienne des surfaces qu'elle représente. Son équation dans le plan des xz est donc

$$(4) \qquad (1 - \gamma^2)z^2 - 2\gamma xz - 2px - 2h(1 - \gamma^2)z = 0.$$

Elle est toujours du genre hyperbole, tant que l'on a $\gamma \gtrless 0$; par suite les surfaces (2) ne peuvent être que des *hyperboloïdes* ou des *cônes*, tant que γ est différent de zéro.

Le z du centre de la méridienne étant égal à $-\frac{p}{\gamma}$, on voit que ce centre s'éloigne à l'infini, si γ tend vers zéro. Pour $\gamma = 0$, la section méridienne est la parabole

$$z^2 - 2px - 2hz = 0,$$

et la surface de révolution est un *paraboloïde*.

Il faut maintenant distinguer les cas où les surfaces (2) sont des hyperboloïdes à une nappe de ceux où elles sont des hyperboloïdes à deux nappes, ou des cônes. Il suffit pour cela de déterminer les points d'intersection de leur axe avec la section méridienne (4).

L'équation qui donne le z de ces points est

$$\gamma(1+\gamma^2)z^2 + 2p(1+\gamma^2)z - 2ph(1-\gamma^2) + 2p^2\gamma = 0.$$

Cette coordonnée sera réelle si l'on a

$$(p + 2h\gamma)(1-\gamma^2) \geq 0;$$

donc, si l'on a

$$(p + 2h\gamma)(1-\gamma^2) > 0,$$

il y a deux points d'intersection réels et distincts; et par suite l'équation (2) représente un *hyperboloïde à deux nappes*.

Si l'on a

$$(p + 2h\gamma)(1-\gamma^2) = 0,$$

les deux points d'intersection sont confondus en un seul, et l'équation (2) représente un *cône*.

Enfin, si l'on a

$$(p + 2h\gamma)(1-\gamma^2) < 0,$$

les points d'intersection sont imaginaires, et l'on a un *hyperboloïde à une nappe*.

Or, il est facile de voir que le produit ci-dessus est positif si γ varie de $-\infty$ à $-\frac{p}{2h}$, et de -1 à $+1$; qu'il est au contraire négatif si γ varie de $-\frac{p}{2h}$ à -1, et de $+1$ à $+\infty$; et qu'enfin il est nul si γ prend les valeurs $-\frac{p}{2h}$, -1 et $+1$. On suppose $p > 2h$.

Donc, si γ varie de $-\infty$ à $-\frac{p}{2h}$, ou de -1 à $+1$, on a des *hyperboloïdes à deux nappes*.

Si γ varie de $-\frac{p}{2h}$ à -1 ou de $+1$ à $+\infty$, on a des *hyperboloïdes à une nappe*.

Et pour les valeurs de γ égales à $-\frac{p}{2h}$, -1, $+1$, on a des *cônes*.

Il faut encore remarquer que, si γ varie de -1 à $+1$, on obtient, pour $\gamma = 0$, un *paraboloïde*. C'est la limite commune des deux séries d'hyperboloïdes à deux nappes, obtenus en faisant croître γ de -1 à zéro, ou en le faisant décroître de $+1$ à zéro.

Les axes des trois cônes ont pour équations dans le plan des xz

$$2px + 4hz - p^2 - 4h^2 = 0,$$

$$x + z - p = 0,$$

$$x - z - p = 0,$$

et l'axe du paraboloïde

$$z - h = 0.$$

Le premier de ces axes touche la parabole limite sur l'axe des z. Quant aux autres, nous connaissons déjà leur position.

La discussion a été faite en supposant $p > 2h$; elle serait aussi facile, et presque semblable, en supposant $p < 2h$.

Mais, si $p = 2h$, le premier cône se confond avec le second. Toute valeur de γ moindre que $+1$ donne un hyperboloïde à deux nappes, tandis que toute valeur supérieure à $+1$ donne un hyperboloïde à une nappe.

Note. — La même question a été résolue par MM. Escary, Tourrettes et Moret-Blanc.