Composition mathématique pour l'admission à l'École polytechnique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 408-413

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__408_1>

COMPOSITION MATHÉMATIQUE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

SOLUTIONS ET REMARQUES,

PAR UN ANCIEN ÉLÈVE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

On donne deux axes rectangulaires qui se coupent en o et une droite N *qui rencontre ces axes en a et b.*

On demande le lieu du pôle de N, par rapport aux coniques qui coupent cette droite à angle droit, et dont les axes sont dirigés suivant oa et ob (*).

D'un point quelconque m de N élevons une perpendiculaire à cette droite, appelons e le point où elle rencontre oa, et g le point où elle rencontre ob. Cherchons une construction du pôle de N, par rapport à la conique tangente en m à eg.

Du point o, abaissons une perpendiculaire sur N, appelons i le point où elle rencontre N, α le point où elle coupe la conique et j un point tel que $oi \times oj = \overline{o\alpha}^2$. La polaire du point i est la droite jl, menée parallèlement au diamètre om qui est conjugué de $o\alpha$. Le point l, où jl rencontre eg, est le pôle de N par rapport à la conique.

On a

$$ml = oj = \frac{\overline{o\alpha}^2}{oi} = \frac{mg \times me}{oi} = \frac{ma \times mb}{oi}.$$

Prenons le symétrique de o par rapport à N, et par ce point menons la droite R parallèlement à N. La droite R coupe eg en h, tel que $mh = oi$.

La relation précédente peut alors s'écrire

$$ml \times mh = ma \times mb. \tag{1}$$

De là, nous voyons que *l'on obtient le point l en prenant le point d'intersection de eg et d'une circonférence qui contient les points a, b, h.*

Les points a, b et la droite R sont fixes; on peut alors engendrer le lieu des points l de la manière suivante :

On donne deux points fixes a, b et une droite R

(*) L'énoncé de la question proposée n'était pas formulé ainsi. On est prié de faire la figure.

parallèle à la droite ab. D'un point quelconque m de ab, on élève à cette droite la perpendiculaire ml; cette perpendiculaire rencontre R *au point h. Par les points a, b, h, on fait passer une circonférence; cette courbe coupe ml en l. On demande le lieu des points tels que l, lorsqu'on fait varier m sur ab.*

Il résulte tout de suite de cette génération que les points o, a, b appartiennent au lieu et que ce lieu est symétrique par rapport à la perpendiculaire à ab élevée du point c milieu de ce segment. En prenant cet axe de symétrie comme axe des x, et N comme axe des y, la relation (1) s'écrit

$$\overline{mh}.x = y^2 - \overline{ac}^2.$$

Désignons mh par q et ac par K, cette équation s'écrit

$$y^2 = q\left(x + \frac{K^2}{q}\right).$$

Et en posant $x + \frac{K^2}{q} = x'$, on a

$$y^2 = qx',$$

équation d'une parabole, dont le sommet est à une distance du point c égale à $\frac{K^2}{q}$.

Ce sommet s'obtient du reste par la construction précédente, en cherchant le point du lieu qui est sur l'axe de la parabole : on décrit pour cela une circonférence qui contient a et b et qui est tangente à R : cette courbe coupe l'axe au sommet cherché.

Nous arriverons tout à l'heure à une autre construction du sommet de la parabole.

Il résulte de l'équation du lieu que la distance du sommet de la parabole au foyer de cette courbe est égale au quart de oi. Nous allons arriver autrement à ce résultat.

Prenons en o' le symétrique de o, par rapport à l'axe de la parabole. Nous avons en o les sommets des angles droits de deux triangles rectangles inscrits dans la parabole. Les hypoténuses de ces triangles sont ab et la perpendiculaire abaissée de o' sur ab. Ces hypoténuses se coupent en n, et l'on sait, d'après un théorème de Frégier, que on est alors normale en o à la parabole. Là droite oo' et cette normale interceptent, sur l'axe de la parabole, un segment qui est égal au paramètre de cette courbe, et, comme ce segment est la moitié de oi, on voit ainsi que la distance du sommet de la parabole au foyer de cette courbe est égale au quart de oi.

Le quadrilatère $ao'ob$ est inscrit dans la parabole, ses diagonales se coupent en u sur l'axe. Appelons t le point où l'axe de la parabole rencontre ob, la polaire du point t passe en u : donc le sommet de la parabole est le point z milieu du segment tu.

En rapprochant cette construction du sommet, de celle à laquelle nous étions d'abord arrivé, nous obtenons cette proposition de Géométrie élémentaire :

On a un triangle isoscèle atb. On mène les deux hauteurs tc, ao; ces droites se coupent en u. On prolonge tc jusqu'en s, de façon que cs soit égale à la distance du point o à la base ab. On joint le point a au point s et le point a au point z, milieu de tu : démontrer que l'angle zas est droit.

On peut se demander quels sont les arcs de la parabole qui correspondent à des ellipses, et les arcs qui correspondent à des hyperboles. On a tout de suite la réponse en remarquant que, pour les ellipses seulement, le pied de la normale est d'un même côté par rapport aux points où cette droite rencontre les axes. Lors donc que le point m est en dehors de ab, on a des points, tels que l, provenant d'ellipses. C'est alors seulement sur l'axe boa de la parabole qu'on a des points provenant d'hyperboles.

Cherchons, en prenant un point quelconque m' situé sur ab entre a et b, quelles sont les asymptotes de l'hyperbole normale en m' à ab.

Le point m' est le milieu de la portion de la tangente en ce point à l'hyperbole qui est comprise entre les asymptotes cherchées, et comme ces droites doivent être également inclinées sur les axes, on les obtient par cette construction : On circonscrit une circonférence au triangle aob et l'on joint le point o aux points où cette circonférence est rencontrée par la perpendiculaire élevée en m' à la normale N : ces droites sont les asymptotes cherchées. On retrouve bien par cette construction que, si le point choisi sur ab est au milieu de ce segment, l'hyperbole correspondante est équilatère. Pour les points a et b, on a des coniques infiniment aplaties qui forment la transition entre les ellipses et les hyperboles.

On verra facilement que, pour obtenir les foyers d'une des coniques, il suffit de prendre les intersections, avec l'un des axes, de la circonférence qui a pour diamètre la portion de l'autre axe comprise entre N et la tangente à la conique que l'on considère. Pour obtenir les sommets de la conique passant en m, on opère ainsi : Du point a', milieu de oa, on décrit une circonférence avec om pour rayon ; cette courbe rencontre la droite ob aux sommets de la conique. De même pour l'autre axe, en employant le milieu b' de ob.

Puisque les segments ma et mb sont dans le rapport des carrés des axes de la conique, nous pouvons de cette construction déduire cette proposition élémentaire :

On a un triangle boa et les points a' et b' milieux des côtés oa, ob ; on prend un point quelconque m sur *l'hypoténuse; on a*

$$\frac{ma}{mb} = \frac{\overline{a'm}^2 - \overline{oa'}^2}{\overline{b'm}^2 - \overline{ob'}^2}.$$

On demande la démonstration directe de cette proposition ainsi que du théorème qui a donné la construction des axes et qu'on peut énoncer ainsi :

Un point d'une conique le pied de la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente en ce point et les extrémités d'un des axes de la conique sont sur une même circonférence de cercle.

Nous sommes arrivé géométriquement à la relation (1) ; on peut, à partir du moment où cette relation est établie, continuer de la manière suivante.

Joignons le point a au point h, le point b au point l, et abaissons sur R la perpendiculaire av.

L'angle lba est égal à l'angle mha, et par suite est égal à l'angle vah.

Lorsque l'on considère différentes positions de ml, on a des droites telles que ah et bl qui forment deux faisceaux homographiques.

Les droites hl qui passent par les points où R est rencontrée par les droites telles que ah forment aussi un faisceau (dont le sommet est à l'infini) qui est homographique au faisceau formé par les droites bl. Les rayons homologues de ces faisceaux se rencontrent en des points, tels que l, qui appartiennent à une parabole. Cette courbe passe par le sommet b du faisceau des droites bl. De même, elle passe par a qu'on aurait pu prendre comme sommet d'un faisceau de droites. L'axe est perpendiculaire à ab, etc.

Nous avons rejeté à la fin de cette Note, et nous avons indiqué rapidement cette solution géométrique, parce qu'elle nécessite des connaissances qui sont en dehors du cours de Mathématiques spéciales.