GÉRONO

Note sur la résolution en nombres entiers positifs du système des trois équations $x = u^2, x+1 = 2v^2, 2x+1 = 3w^2$

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 381-383

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__381_1>

NOTE

SUR LA RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS POSITIFS
DU SYSTÈME DES TROIS ÉQUATIONS

$$x = u^2, \quad x + 1 = 2v^2, \quad 2x + 1 = 3w^2$$

(voir 2ᵉ série, t. XVI, p. 430);

Ces équations ont déjà été résolues par M. *E. Lucas*; elles n'ont qu'une seule solution entière positive : $x = u = v = w = 1$; c'est ce qui résulte aussi de ce remarquable théorème démontré par M. de Jonquières, que :

Le nombre 5 *est le seul nombre entier qui jouisse de la double propriété d'être la somme des carrés de deux nombres consécutifs, et d'avoir pour carré la somme des carrés de deux nombres consécutifs* (2e série, t. XVII, p. 308).

L'élimination de l'inconnue x, entre les trois équations proposées, donne

$$u^2 + 1 = 2v^2 \tag{1}$$

et

$$2u^2 + 1 = 3w^2. \tag{2}$$

Le nombre u étant nécessairement impair, l'équation (1) revient à

$$v^2 = n^2 + (n+1)^2. \tag{3}$$

Ainsi, v est un nombre dont le carré est égal à la somme des carrés de deux nombres consécutifs.

Remarquons, de plus, que v est premier avec 5, car autrement le chiffre des unités simples du u^2 serait 9, et par suite le chiffre des unités simples de w^2 serait 3, ce qui ne peut convenir à un carré.

Cela posé, des équations (1) et (2) on tire

$$4v^2 - 1 = 3w^2, \quad (2v+1)(2v-1) = 3w^2,$$

et, comme les nombres impairs $2v+1$, $2v-1$ sont premiers entre eux, il faut qu'on ait des relations de la forme

$$2v + 1 = 3\alpha^2, \quad 2v - 1 = \beta^2, \quad \alpha\beta = w,$$

ou

$$2v + 1 = \alpha^2, \quad 2v - 1 = 3\beta^2, \quad \alpha\beta = w.$$

Mais les égalités $2\nu + 1 = \alpha^2$, $2\nu - 1 = 3\beta^2$ sont inadmissibles, car il en résulterait $\alpha^2 - 3\beta^2 = 2$, ou, parce que α et β sont impairs,

$$(8M + 1) - 3(8N + 1) = 2;$$

$8p = 4$, ce qui est absurde.

Donc

$$2\nu - 1 = \beta^2 = (2m + 1)^2,$$

d'où

$$(4) \qquad \nu = m^2 + (m + 1)^2,$$

c'est-à-dire que ν est aussi la somme des carrés de deux nombres consécutifs. Mais ν est premier avec 5; par conséquent, d'après le théorème précité, les équations simultanées (3) et (4) ne peuvent être vérifiées que par $m = 0$, $n = 0$, $\nu = 1$; il s'ensuit

$$x = 1, \quad u = 1, \quad \nu = 1.$$

(G.)