

GÉRONO

**Note sur la résolution en nombres entiers
positifs du système des trois équations**

$$x = u^2, x + 1 = 2v^2, 2x + 1 = 3w^2$$

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 17
(1878), p. 381-383

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__381_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE

SUR LA RÉOLUTION EN NOMBRES ENTIERS POSITIFS
DU SYSTÈME DES TROIS ÉQUATIONS

$$x = u^2, \quad x + 1 = 2v^2, \quad 2x + 1 = 3w^2$$

(voir 2^e série, t. XVI, p. 430);

Ces équations ont déjà été résolues par *M. E. Lucas* ;
elles n'ont qu'une seule solution entière positive :
 $x = u = v = w = 1$; c'est ce qui résulte aussi de ce

remarquable théorème démontré par M. de Jonquières, que :

Le nombre 5 est le seul nombre entier qui jouisse de la double propriété d'être la somme des carrés de deux nombres consécutifs, et d'avoir pour carré la somme des carrés de deux nombres consécutifs (2^e série, t. XVII, p. 308).

L'élimination de l'inconnue x , entre les trois équations proposées, donne

$$(1) \quad u^2 + 1 = 2v^2$$

et

$$(2) \quad 2u^2 + 1 = 3w^2.$$

Le nombre u étant nécessairement impair, l'équation (1) revient à

$$(3) \quad v^2 = n^2 + (n + 1)^2.$$

Ainsi, v est un nombre dont le carré est égal à la somme des carrés de deux nombres consécutifs.

Remarquons, de plus, que v est premier avec 5, car autrement le chiffre des unités simples du u^2 serait 9, et par suite le chiffre des unités simples de w^2 serait 3, ce qui ne peut convenir à un carré.

Cela posé, des équations (1) et (2) on tire

$$4v^2 - 1 = 3w^2, \quad (2v + 1)(2v - 1) = 3w^2,$$

et, comme les nombres impairs $2v + 1$, $2v - 1$ sont premiers entre eux, il faut qu'on ait des relations de la forme

$$2v + 1 = 3\alpha^2, \quad 2v - 1 = \beta^2, \quad \alpha\beta = w,$$

ou

$$2v + 1 = \alpha^2, \quad 2v - 1 = 3\beta^2, \quad \alpha\beta = w.$$

Mais les égalités $2\nu + 1 = \alpha^2$, $2\nu - 1 = 3\epsilon^2$ sont inadmissibles, car il en résulterait $\alpha^2 - 3\epsilon^2 = 2$, ou, parce que α et ϵ sont impairs,

$$(8M + 1) - 3(8N + 1) = 2;$$

$8p = 4$, ce qui est absurde.

Donc

$$2\nu - 1 = \epsilon^2 = (2m + 1)^2,$$

d'où

$$(4) \quad \nu = m^2 + (m + 1)^2,$$

c'est-à-dire que ν est aussi la somme des carrés de deux nombres consécutifs. Mais ν est premier avec 5; par conséquent, d'après le théorème précité, les équations simultanées (3) et (4) ne peuvent être vérifiées que par $m = 0$, $n = 0$, $\nu = 1$; il s'ensuit

$$x = 1, \quad u = 1, \quad w = 1.$$

(G.)