Nouvelles annales de mathématiques

E. de Jonquières

Détermination de certains cas généraux où l'équation $x^3 \pm a = y^2$ n'admet pas de solution en nombres entiers

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 374-380

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__374_1>

DÉTERMINATION DE CERTAINS CAS GÉNÉRAUX OU L'ÉQUATION $x^3 \pm a = y^2$ N'ADMET PAS DE SOLUTION EN NOMBRES ENTIERS;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

I. Tandis que la solution complète, en nombres entiers, de l'équation indéterminée à deux inconnues a été trouvée depuis longtemps, on ne possède encore qu'un petit nombre de résultats concernant les équations à deux indéterminées dans lesquelles les inconnues, ou seulement l'une d'elles, entrent à un degré supérieur au second, comme cela a lieu, par exemple, dans l'équation $x^3 \pm a = y^2$, et ces résultats ne semblent être reliés entre eux par aucune loi simple.

Tantôt, pour certaines valeurs du nombre donné a, positives ou négatives, on trouve aisément quelques solutions isolées, mais sans pouvoir dire si le nombre des solutions possibles est limité ou infini. L'équation $x^3 + 8 = y^2$, qui admet les solutions

$$x = -2,\ 1,\ 2,\ 46,$$
$$y = \ \ 0,\ 3,\ 4,\ 312,$$

est dans ce cas, avec une infinité d'autres.

D'autres fois, mais rarement, on démontre qu'il n'existe qu'une seule solution. C'est ce qui a été fait par Fermat, Euler et Legendre pour les équations $x^3 - 2 = y^2$, $x^3 - 4 = y^2$; par M. Gerono, pour $x^3 + 1 = y^2$; par le P. Pepin, S. J., pour quelques autres, parmi lesquelles je citerai $x^3 - 49 = y^2$, $x^3 - 81 = y^2$, $x^3 - 121 = y^2$.... [*Voir*, dans le tome I (3e série) du *Journal de Mathématiques*, un important article de ce savant auteur « sur certains nombres complexes », et notamment, à la page 345 et aux suivantes, une étude sur l'équation $x^3 - a = y^2$].

Tantôt l'équation exclut les valeurs paires des indéterminées, ou seulement d'une seule; l'équation $x^3 + 15 = y^2$, qui est satisfaite par les systèmes de valeurs

$$x = 1,\ \ 109,\ \ldots,$$
$$y = 4,\ 1138,\ \ldots$$

est du nombre de ces dernières. L'autre cas se présente chaque fois que a est double d'un impair, parce qu'il y a alors incongruence entre les deux membres de l'équation.

Tantôt enfin aucune solution n'est possible. Le P. Pepin a examiné, dans le Mémoire précité, diverses catégories de valeurs de la constante a, pour lesquelles cette circonstance se présente et se démontre *a priori*. C'est une étude du même genre qui fait l'objet de la présente Note. Je me propose d'y faire connaître quelques catégories, nouvelles, je crois, comprenant chacune une infinité de cas particuliers, où l'impossibilité d'une solution en nombres entiers est démontrée.

II. L'équation que je considère est $x^3+a=y^2$. L'impossibilité d'une solution en nombres entiers (x pouvant, ainsi que a, être positif ou négatif) dépend de la valeur de a, et se présente toujours, comme on va le voir, dans les trois cas suivants :

1° Lorsque a est égal au cube, diminué de 4, d'un nombre c (positif ou négatif), ayant l'une des trois formes $8b+1$, $8b+3$, $8b+7$ en valeur absolue et abstraction faite de son signe ;

2° Lorsque a est égal au cube d'un nombre c (positif ou négatif), ayant en valeur absolue, et abstraction faite de son signe, l'une des trois formes $8b+3$, $8b+5$, $8b+7$, ce cube étant diminué d'une puissance de 4 autre que 4 lui-même ;

3° Lorsque a est égal au cube, diminué de 1, d'un nombre c impairement pair, $c=2(2d+1)$, positif ou négatif.

Examinons successivement ces trois catégories de valeurs de a.

III. En premier lieu, soit, par exemple,

$$a=(8b+1)^3-4.$$

On voit d'abord que l'équation $x^3\pm c^3-4=y^2$ n'admet pour x aucune valeur paire ; car, dans cette hypothèse, le premier membre aurait la forme $8n\mp 3$, et ne s'accorderait pas avec le second membre qui, y étant alors impair, aurait la forme $8n+1$.

x ne pouvant être qu'impair et y pair, écrivons ainsi l'équation donnée, $x^3+c^3=4(t^2+1)$, en faisant

$y = 2t$; puis, réduisant le premier membre en facteurs,

$$(x + c)\,(x^2 - cx + c^2) = 4\,(t^2 + 1).$$

Le deuxième facteur du premier membre est impair; donc $x + c$ est un multiple de 4 et, par suite, si l'on suppose d'abord c positif, x est de la forme $4n - 1$. Cela étant, le facteur $(x^2 - cx + c^2)$ est, à cause de $c = 8b + 1$, de la forme $4k - 1$. Puisque ce facteur ne divise pas le facteur 4 du second membre, il devrait diviser l'autre, qui est la somme de deux carrés premiers entre eux; donc il devrait être lui-même décomposable en une somme de deux carrés, ce qui est impossible puisqu'il a la forme $4k - 1$.

Lorsque c est négatif, x est de la forme $4n + 1$, le terme $- cx$ change de signe, et la conclusion reste la même.

L'équation $x^3 \pm (8b + 1)^3 - 4 = y^2$ n'a donc aucune solution en nombres entiers, et une démonstration analogue, que je supprime pour abréger, conduit à la même conclusion pour les deux autres cas, $c = 8b + 3$ et $c = 8b + 7$.

IV. En second lieu, soit d'abord, par exemple,

$$a = (8b + 5)^3 - 4^2.$$

On voit, comme ci-dessus, que dans l'équation donnée x ne peut être pair. Cela posé, y pair peut être égal, soit à $2t$ (t impair), soit à $4r$, r étant indistinctement pair ou impair.

Dans la première de ces deux hypothèses, on a, en décomposant en facteurs,

$$(x + c)\,(x^2 - cx + c^2) = 4\,(t^2 + 4).$$

$(x + c)$ est multiple de 4, puisque le second facteur est impair. Donc, en supposant d'abord c positif, x est de la forme $4k - c$, ou $4k - 8b - 5$, c'est-à-dire $4n - 1$. Il en est par conséquent de même de $(x^2 - cx + c^2)$, qui ne saurait, par ce motif, diviser, comme il devrait le faire, $t^2 + 4$, somme de deux carrés premiers entre eux, puisque t est impair. Donc il n'y a aucune solution possible.

Dans la seconde hypothèse, celle de y pairement pair, on peut écrire

$$(x + c)\ (x^2 - cx + c^2) = 16\,(r^2 + 1);$$

$x + c$ devant être un multiple de 16, puisque l'autre facteur du premier membre est impair, x (en supposant encore c positif) a la forme $4n - 1$. Il en est donc de même de $(x^2 - cx + c^2)$, et par conséquent ce facteur ne peut diviser la somme $r^2 + 1$ de deux carrés premiers entre eux.

En résumé, il n'y a de solution possible, ni dans l'une, ni dans l'autre hypothèse.

Lorsque c est négatif, x a la forme $4n + 1$, le terme cx change de signe, et la conclusion demeure la même.

Si, au lieu de prendre, comme ci-dessus, $a = c^3 - 16$, on suppose $a = c^3 - 4^{p+2}$ (p étant un nombre entier positif), ou $a = -c^3 - 4^{p+2}$, on a à considérer successivement plusieurs cas, au lieu de deux seulement, savoir

$$y = 2\,(2d + 1), \quad y = 2^2\,(2d + 1), \quad y = 2^3(2d + 1), \ldots,$$

mais la démonstration ne change pas; car, selon qu'on prend l'une ou l'autre de ces hypothèses, on peut toujours mettre le second membre, soit sous la forme

$$4^{2q+1}\,(t^2 + 4),$$

t étant impair, soit, si cette dernière condition n'est pas remplie, sous la forme $4^{2q}\,(r^2 + 1)$, r étant alors indistinctement pair ou impair. Les deux carrés t^2 et 4 dans le premier cas, et les deux carrés r^2 et 1 dans le second cas sont premiers entre eux, tandis que le facteur impair du premier membre $(x^2 - cx + c^2)$ est toujours, comme dans le cas particulier de $a = c^3 - 16$ pour lequel la démonstration a été développée, indécomposable en une somme de deux carrés et par conséquent ne peut être un diviseur du second membre.

V. En troisième lieu,

$$a = + c^3 - 1 \quad \text{et} \quad c = 2b = 2(2d + 1).$$

On voit immédiatement que x ne peut être pair. Écrivons l'équation donnée ainsi

$$(x + 2b)(x^2 - 2bx + 4b^2) = y^2 + 1;$$

$x + 2b$, étant un diviseur impair de la somme $y^2 + 1$ de deux carrés premiers entre eux, est nécessairement de la forme $4n + 1$; donc x est de la forme $4k - 1$, en supposant d'abord que c est positif, et par conséquent le second facteur du premier membre est de la forme $4q - 1$, puisque b est impair. Ainsi ce facteur ne peut être diviseur de $y^2 + 1$. L'hypothèse est donc inadmissible, et l'impossibilité d'une solution est démontrée.

Lorsque c est supposé négatif, le raisonnement et les conclusions sont les mêmes.

VI. Il résulte de ce qui précède que l'équation $x^3 + a = y^2$, en se bornant à écrire ici les valeurs numériques les plus simples, est insoluble en nombres entiers pour les trois suites infinies de valeurs de a, savoir :

$a = \ldots -347, -129, -5, -3, +23, 339, 725, 1327, \ldots$

$a = \ldots -359, -141, -65, -43, -17,$
$+11, 61, 87, 109, 279, 327, 1315, \ldots$

$a = \ldots -2745, -1001, -217, -9, +7, 215, 999, 2743, \ldots$

L'impossibilité de l'équation $x^3 + a = y^2$ pour les valeurs particulières $a = 7$ et -17 a été démontrée dans les *Nouvelles Annales* de 1869 et de 1877, celle-ci notamment par M. Gerono. L'impossibilité pour les cas de $a = -3, -5, -9$, qui se retrouvent dans les suites ci-dessus, a été démontrée, d'une façon très-différente, par le P. Pepin dans le Mémoire précité.

Il y a d'autres cas où l'impossibilité d'une solution peut être prouvée *a priori*. Les équations

$$x^3 + 4 = y^2, \quad x^3 + 6 = y^2, \quad x^3 + 14 = y^2, \quad x^3 + 16 = y^2$$

sont de ce nombre, les solutions

$$x = 0, \quad y = 2 \quad \text{et} \quad x = 0, \quad y = 4$$

étant exclues comme de raison; mais, pour abréger, je me bornerai à donner la démonstration pour l'équation

$$x^3 + 6 = y^2.$$

On voit d'abord que x et y ne peuvent être pairs, ensuite que x, impair, est nécessairement de la forme $8n + 3$. Cela posé, ajoutons 2 aux deux membres de l'équation; puis, décomposant son premier membre en facteurs, mettons-la sous la forme

$$(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = y^2 + 2 \times 1^2.$$

$x + 2$ est de la forme $8n + 5$; donc il ne peut être diviseur du second membre, car les expressions telles que $y^2 + 2u^2$, y et u étant premiers entre eux, n'admettent pas d'autres diviseurs linéaires impairs que ceux de l'une des formes $8n + 1$ ou $8n + 3$. Donc, etc. L'impossibilité des trois autres équations résulte de considérations analogues; le lecteur en trouvera aisément la démonstration.