V. VIDAL

Résolution des équations numériques du quatrième degré

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 367-370

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__367_0>

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. V. VIDAL,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Soit

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = F(x) = 0$$

une équation du quatrième degré.

La première fonction de Sturm est

$$\begin{vmatrix} B & 2Cx^2 + 3Dx + 4E \\ 4A & 3Bx^2 + 2Cx + D \end{vmatrix}$$
$$= (3B^2 - 8AC)x^2 + 2(BC - 6AD)x$$
$$+ BD - 16AE = \varphi(x).$$

En fonction des coefficients de $\varphi(x)$, l'équation proposée peut s'écrire

$$(4Ax + B)^4 - 2(3B^2 - 8AC)(4Ax + B)^2$$
$$+ \frac{8}{3}[B(3B^2 - 8AC) - 4A(BC - 6AD)](4Ax + B)$$
$$- 16A^2(BD - 16AE) + 8AB(BC - 6AD)$$
$$- B^2(3B^2 - 8AC) = 0.$$

I. Supposons que les trois coefficients de la première fonction de Sturm soient identiquement nuls, la proposée se réduit à $(4Ax + B)^4 = 0$. Il y a quatre racines réelles, égales entre elles.

II. Soient $3B^2 - 8AC = 0$, $BC - 6AD = 0$; l'équation proposée se réduit à

$$(4Ax + B)^4 - 16A^2(BD - 16AE) = 0.$$

Les quatre racines sont imaginaires dans le cas de $BD - 16AE < 0$.

Pour $BD - 16AE > 0$, il y a deux racines réelles que l'on trouve par l'extraction de deux racines carrées successives.

III. Supposons que l'on ait seulement $3B^2 - 8AC = 0$. La proposée se réduit à

$$(4Ax + B)^4 - \frac{32}{3}A(BC - 6AD)(4Ax + B)^2$$
$$- 16A^2(BD - 16AE) + 8AB(BC - 6AD) = 0.$$

La valeur minimum du premier membre a lieu pour la valeur de x donnée par

$$(4Ax_1 + B)^2 - \frac{8}{3}A(BC - 6AD) = 0;$$

d'où

$$4Ax_1 + B = 2\sqrt{\frac{A(BC - 6AD)}{3}},$$

et cette valeur minimum du premier membre sera

$$- 8A(BC - 6AD)^2\sqrt{\frac{A(BC - 6AD)}{3}}$$
$$- 16A^2(BD - 16AE) + 8AB(BC - 6AD).$$

Si elle est négative, la proposée admettra deux racines réelles, l'une plus grande, l'autre plus petite que la valeur ci-dessus de x, ainsi qu'on le voit facilement. Si elle est positive, les quatre racines sont imaginaires.

IV. Considérons maintenant le cas général où aucun des coefficients de la fonction de Sturm n'est nul.

Si les racines de l'équation

$$(3B^2 - 8AC)x^2 + 2(BC - 6AD)x + (BD - 16AE) = 0$$

sont imaginaires, ou égales entre elles, la première fonction de Sturm ne changera jamais de signe, quelque valeur que l'on attribue à x, et il suffira, pour connaître le nombre des racines réelles et pour les séparer, de considérer les trois fonctions

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E,$$
$$4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D,$$
$$(3B^2 - 8AC)x^2 + 2(BC - 6AD)x + (BD - 16AE).$$

Pour $3B^2 - 8AC < 0$, les quatre racines sont imaginaires ; pour $3B^2 - 8AC > 0$, deux racines sont réelles.

V. Si les deux racines de l'équation $\varphi(x) = 0$ sont réelles et inégales, on les substitue dans la proposée. Si l'une d'elles satisfait à l'équation proposée, elle est une racine double, puisque dans ce cas l'équation $F'(x) = 0$ est aussi satisfaite d'après la relation fondamentale

$$16A.F(x) = F'(x)\,(4Ax + B) - 16A\varphi(x).$$

Deux des racines de l'équation $F(x) = 0$ étant connues, les deux autres se trouveront par la résolution d'une équation du second degré.

VI. Il ne reste plus à considérer que le cas où les deux racines de $\varphi(x) = 0$ sont réelles et inégales, et où l'équation $F(x) = 0$ n'admet pas de racines égales.

Les racines de $F(x) = 0$, si elles sont réelles, sont séparées par les racines des deux équations

$$4Ax + B = 0, \quad \varphi(x) = 0,$$

l'une du premier, l'autre du second degré (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1872, p. 404, etc.). Substituant donc les solutions des deux dernières équations dans $F(x) = 0$, les signes des divers résultats indiqueront le nombre des racines réelles, dont on pourra approcher de plus en plus à l'aide d'une quelconque des méthodes bien connues d'approximation numérique.

VII. Si l'on voulait faire usage des deux dernières fonctions de Sturm, leur calcul s'effectuerait bien simplement, car elles peuvent être mises sous la forme

$$S\,\frac{d\varphi}{dx} + T(4Ax + B) = 0, \quad 4S^3 - T^2 = 0,$$

en posant $S = 12AE - 3BD + C^2$,

$$2T = \begin{vmatrix} 6A & 3B & C \\ 3B & 4C & 3D \\ C & 3D & 4E \end{vmatrix}.$$

On voit donc que, dans tous les cas possibles, la résolution d'une équation quelconque du quatrième degré se fait très-simplement à l'aide de l'équation du second degré $\varphi(x) = 0$, dont les coefficients, ayant une forme très-mnémonique, se calculent à simple vue par de pures opérations d'Arithmétique élémentaire.