Nouvelles annales de mathématiques

A. Tissot

Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques

Nouvelles annales de mathématiques 2^e^ série, tome 17 (1878), p. 351-366

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__351_1>

MÉMOIRE

SUR LA REPRÉSENTATION DES SURFACES ET LES PROJECTIONS DES CARTES GÉOGRAPHIQUES;

PAR M. A. TISSOT.

[SUITE (*)].

Dans le cas où l'on aurait à la fois $h = k$, $\Theta' = \Theta$, tous les angles seraient conservés, et tous les rapports de longueur seraient égaux entre eux. L'ellipse indicatrice serait un cercle. Une figure infiniment petite de forme quelconque, tracée autour du point que l'on considère, et sa projection seraient semblables.

Enfin, le cas où l'on aurait en même temps $h = k$, $\Theta' = \pi - \Theta$, est celui où les deux angles donnés éprou-

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XVII, p. 145.

veraient le *maximum* d'altération. La première tangente principale, sur la surface à représenter, serait bissectrice de celui de ces deux angles qui est obtus, et il viendrait

$$a = h \tang \frac{\Theta}{2}, \quad b = h \cot \frac{\Theta}{2}.$$

Formules dans lesquelles les directions se trouvent rapportées à d'autres lignes que les tangentes principales.

23. Ayant déterminé en grandeur et en direction les axes de l'ellipse indicatrice, on pourra calculer les diverses altérations d'angles et de longueurs par les formules des numéros 6 à 19. Mais on peut aussi arriver à ce but en partant immédiatement des données Θ, Θ', h et k. Soit φ l'angle d'une direction quelconque avec le côté de Θ suivant lequel le rapport des longueurs est h; soit φ' sa projection; soit r le rapport de longueurs suivant la direction considérée. La relation analogue à

$$hk \sin \Theta' = ab \sin \Theta$$

est ici

$$hr \sin \varphi' = ab \sin \varphi;$$

si l'on multiplie en croix, on trouvera

$$r \sin \Theta \sin \varphi' = k \sin \Theta' \sin \varphi.$$

On a de même

$$r \sin \Theta \sin (\Theta' - \varphi') = h \sin \Theta' \sin (\Theta - \varphi).$$

Des deux dernières équations, il est facile de tirer φ' et r en fonction des données et de l'angle φ.

Quant au rapport des éléments superficiels, il est $\dfrac{hk \sin \Theta'}{\sin \Theta}$.

24. Ces formules conduisent à des relations très-simples lorsque les directions se trouvent rapportées à l'une des deux droites dont l'angle éprouve le *maximum* d'altération. Ce *maximum* étant représenté, comme plus haut (n° 7), par 2ω, ou l'angle lui-même par $\frac{\pi}{2}+\omega$, appelons c le rapport de longueurs sur les deux droites; soit ψ l'angle que l'une d'elles fait avec une direction quelconque, et soit ψ' la projection de ψ. Il viendra

$$\cot\psi' - \cot\psi = 2\tang\omega,$$
$$r\sin\psi' = c\sin\psi,$$
$$\tang(\psi'+\omega) - \tang(\psi-\omega) = 2\tang\omega,$$
$$r\cos(\psi'+\omega) = c\cos(\psi-\omega).$$

Le rapport des éléments superficiels est c^2.

Séries de couples de courbes satisfaisant à certaines conditions.

25. Nous avons vu (n° 4) que, dans tout mode de représentation où les angles ne sont pas conservés, il existe, sur chacune des deux surfaces, un système unique de deux séries de lignes se coupant à angle droit et dont les projections sur l'autre surface se coupent aussi à angle droit. En chaque point, le rapport de longueurs a son *maximum* et son *minimum* sur les deux lignes de séries différentes qui viennent s'y rencontrer (n° 14). On peut se proposer de déterminer les courbes qui appartiennent à l'une ou à l'autre série. On peut aussi chercher les deux séries de courbes dont les intersections produisent en chaque point l'angle qui éprouve la plus grande altération (n° 12); on sait que, sur chacune, le rapport de longueurs est constamment égal à la

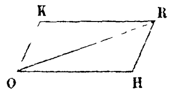
moyenne géométrique entre ses valeurs *maxima* et *minima* (n° 17), de sorte que, si le mode de projection conserve les aires, ces courbes se trouveront projetées en vraie grandeur. Plus généralement, on peut se proposer de déterminer les courbes sur lesquelles le rapport de longueurs varie suivant une loi donnée, ainsi que les systèmes de courbes dont les intersections produisent, sur l'une et l'autre surface, des angles variant aussi d'après une loi donnée.

26. Les coordonnées l et m, dont nous avons fait usage jusqu'à présent, définissent respectivement deux séries de courbes tracées sur la première surface, ainsi que leurs projections sur la seconde; les deux mêmes séries de couples de courbes se trouveront également définies par deux coordonnées, fonctions, l'une de l seulement, l'autre de m seulement, les deux fonctions étant du reste arbitraires; enfin, pour caractériser une troisième série de couples de courbes, on peut avoir recours à un troisième paramètre variable, p, ou à une fonction arbitraire de ce paramètre : dans les questions qui ont été énoncées tout à l'heure, il s'agit de déterminer p en fonction de l et de m, de manière que les nouvelles courbes remplissent certaines conditions. Ainsi effectuée, la recherche de ces courbes dépendrait d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre dont la forme se trouve suffisamment indiquée par ce qui précède; on voit en effet qu'elle serait privée de second membre, et que sa résolution se ramènerait à l'intégration de l'équation différentielle $dp = 0$ et à celle d'une autre équation différentielle entre l et m seulement; cette dernière, qui exprime que, pour tous les points de chaque courbe et pour leurs projections, la fonction de l et de m qui représente p reste constante peut servir

aussi bien que p à caractériser les deux séries de couples de courbes; la méthode que nous suivrons consistera à la chercher directement. Si l'on voulait ensuite avoir p, il faudrait, ou intégrer et résoudre par rapport à la constante, ou faire passer tous les termes dans un seul membre et multiplier leur ensemble par l'un des facteurs qui le rend différentielle exacte, ce qui donnerait l'expression de dp. Ainsi envisagées, les questions que nous voulons résoudre se trouvent ramenées à la suivante.

27. Considérons, sur une seule des deux surfaces, le canevas de parallélogrammes infiniment petits formés par les deux séries de courbes qui correspondent respectivement aux coordonnées l et m, et supposons qu'il s'agisse de trouver une troisième série de courbes cou-

Fig. 8.



pant celles de la seconde série sous un angle variable φ, connu en fonction des coordonnées l et m du point d'intersection. Soit OR (*fig.* 8) un élément infiniment petit de l'une des courbes de la troisième série, et OHRK le parallélogramme du canevas qui a pour diagonale OR. On aura, d'après la notation déjà adoptée (n° 20)

$$\mathrm{OH} = \mathrm{L}\,dl, \quad \mathrm{OK} = \mathrm{M}\,dm, \quad \mathrm{HOR} = \varphi, \quad \mathrm{KOR} = \Theta - \varphi;$$

mais le triangle OHR donne

$$\mathrm{OH}\sin\mathrm{HOR} = \mathrm{HR}\sin\mathrm{ORH};$$

il vient donc

$$\mathrm{L}\sin\varphi\,dl - \mathrm{M}\sin(\Theta - \varphi)\,dm = 0;$$

telle est l'équation différentielle des courbes cherchées, pour le cas où l et m varient dans le même sens lorsqu'on se déplace sur OR; dans le cas contraire, il faudrait changer le signe du second terme; l'équation précédente s'appliquera cependant à tous les cas si Θ représente celui des quatre angles sur les côtés duquel l et m vont en augmentant, et si φ est compté positivement à partir du premier de ces côtés, et dans le sens de la rotation du premier vers le second.

28. Cela posé, si l'on veut avoir les équations différentielles des deux séries de lignes qui sont orthogonales sur l'une et l'autre surface, il suffira d'imaginer que OR se confond successivement avec les deux tangentes principales qui partent du point O, ce qui revient à remplacer φ par u, puis par $\frac{\pi}{2} + u$, l'angle u étant celui qui se trouve donné, en fonction de l et de m, par les formules du n° 21; les valeurs correspondantes de $\Theta - \varphi$ sont respectivement v et $v - \frac{\pi}{2}$; de sorte que les deux séries de couples de lignes orthogonales seront fournies par les équations différentielles

$$\mathrm{L} \sin u\, dl - \mathrm{M} \sin v\, dm = 0, \quad \mathrm{L} \cos u\, dl + \mathrm{M} \cos v\, dm = 0.$$

29. S'il s'agit des lignes dont l'angle éprouve en chaque point l'altération *maxima*, il faudra faire successivement $\varphi = u + \mathrm{U}$, $\Theta - \varphi = v - \mathrm{U}$, et $\varphi = u - \mathrm{U}$, $\Theta - \varphi = v + \mathrm{U}$, les angles u et v étant, comme tout à l'heure, ceux du n° 21, et U l'angle du n° 7 pour lequel on a

$$\operatorname{tang} \mathrm{U} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

En effectuant les substitutions, on obtient les équations différentielles

$$\mathrm{L}\sin(\mathrm{U}+u)\,dl+\mathrm{M}\sin(\mathrm{U}-v)\,dm=0,$$
$$\mathrm{L}\sin(\mathrm{U}-u)\,dl+\mathrm{M}\sin(\mathrm{U}+v)\,dm=0.$$

30. Lorsque le canevas primitif a ses angles droits sur la première surface, les équations des lignes qui sont orthogonales à la fois sur la première et sur la seconde deviennent

$$\mathrm{L}\tang u\,dl-\mathrm{M}\,dm=0,\quad \mathrm{L}\cot u\,dl+\mathrm{M}\,dm=0,$$

et celles des lignes dont l'angle subit le maximum d'altération,

$$\mathrm{L}\tang(\mathrm{U}+u)\,dl-\mathrm{M}\,dm=0,$$
$$\mathrm{L}\tang(\mathrm{U}-u)\,dl+\mathrm{M}\,dm=0.$$

Celles-ci se simplifieront encore si, ayant déterminé préalablement les coordonnées p et q des deux séries de lignes qui sont orthogonales sur les deux surfaces, on en fait usage, au lieu d'employer les coordonnées l et m du canevas primitif; on aura alors $u=0$, et les dernières équations se réduiront à

$$\mathrm{P}\sqrt{a}\,dp-\mathrm{Q}\sqrt{b}\,dq=0,\quad \mathrm{P}\sqrt{a}\,dp+\mathrm{Q}\sqrt{b}\,dq=0,$$

P et Q représentant les coefficients de dp et de dq dans les expressions des côtés des rectangles infiniment petits qui composent le nouveau canevas sur la première surface.

Il suit de là que, dans le même système de coordonnées, et pour un mode de représentation conservant les surfaces, les équations des lignes qui se projettent en vraie grandeur sont

$$a\mathrm{P}\,dp-\mathrm{Q}\,dq=0,\quad a\mathrm{P}\,dp+\mathrm{Q}\,dq=0.$$

31. Dans les questions précédentes, nous n'avons considéré que des valeurs particulières du rapport de longueurs; supposons maintenant que l'on veuille déterminer les deux séries de courbes sur lesquelles il se trouve donné par une fonction connue h_1 de l et de m. Soit u_1 l'un des deux angles, égaux entre eux, que la première tangente principale fait, en un point quelconque, avec les deux courbes de séries différentes qui viennent s'y rencontrer; nous obtiendrons cet angle en remplaçant, dans l'une des trois formules en a, b, h et u du n° 21, h par h_1 et u par u_1. Les valeurs de φ pour les deux séries de courbes sont d'ailleurs $u + u_1$ et $u - u_1$. Les équations différentielles que l'on cherche peuvent donc s'écrire immédiatement.

32. Enfin, soit proposé de trouver deux séries de courbes se coupant, ainsi que leurs projections, sous des angles exprimés par deux fonctions connues des coordonnées de chaque point d'intersection. Des formules du n° 21, il résulte que les expressions

$$\frac{hk\sin\Theta'}{\sin\Theta}, \quad \frac{h^2 + k^2 - 2hk\cos\Theta\cos\Theta'}{\sin^2\Theta}$$

sont des invariants du mode de représentation employé, de sorte que, si Θ et Θ' sont donnés, h et k le seront aussi; la question actuelle se ramène donc à la précédente. Elle admet deux solutions, à moins que les angles donnés ne soient droits.

Doubles canevas satisfaisant à certaines conditions.

33. Un double canevas formé par deux séries de lignes sur l'une des surfaces et par leurs projections sur l'autre peut être défini par deux coordonnées, l et m,

convenablement choisies parmi celles qui correspondent respectivement à ces deux séries de lignes. Si l'on substitue à l une fonction de l et à m une fonction de m, on obtiendra un double canevas différent du premier, mais ayant les mêmes angles. Par exemple, bien qu'il n'existe, pour un mode de représentation donné, que deux séries de couples de lignes orthogonales, il y a une infinité de doubles canevas orthogonaux, dont les coordonnées sont respectivement des fonctions arbitraires des coordonnées de l'un d'entre eux. Ce qui varie de l'un à l'autre, c'est le rapport des deux côtés de chaque rectangle infiniment petit ; il varie toutefois de telle manière que le quotient des valeurs qu'il prend pour deux rectangles correspondants sur les deux surfaces soit constamment égal à $\frac{b}{a}$. De cette dernière remarque, il résulte que l'on ne saurait profiter de l'indétermination des fonctions arbitraires pour assigner à ces deux rectangles des formes déterminées ; et même, sur une seule des deux surfaces, on ne pourra faire varier le rapport des deux côtés de chaque rectangle suivant une loi donnée qu'autant que la fonction des coordonnées qui exprime cette loi remplira une certaine condition, qu'il serait facile d'établir.

34. Si l et m sont les coordonnées d'un double canevas, $l+m$ et $l-m$ seront celles du double canevas que formeraient les diagonales des parallélogrammes du premier. En effet, pour l'une des diagonales, le rapport de $\sin\varphi$ à $\sin(\Theta-\varphi)$, qui figure dans l'équation différentielle du n° 27, est égal à $\frac{M}{L}$, et pour l'autre à $-\frac{M}{L}$, de sorte que cette équation donne successivement, pour les deux séries de couples de courbes du nouveau canevas,

$$dl - dm = 0, \quad dl + dm = 0.$$

Lorsque le premier canevas se composera de rectangles, le second sera formé de losanges, et réciproquement.

Cela posé, appelons Φ et Ψ deux fonctions arbitraires, et soient p et q les coordonnées d'un double canevas orthogonal ; celles des autres canevas de rectangles seront $\Phi(p)$ et $\Psi(q)$; celles des doubles canevas de losanges seront $\Phi(p) + \Psi(q)$ et $\Phi(p) - \Psi(q)$.

De même, soient r et s les coordonnées d'un double canevas de losanges ; celles des doubles canevas orthogonaux seront $\Phi(r+s)$ et $\Psi(r-s)$; celles des doubles cavenas de losanges seront

$$\Phi(r+s) + \Psi(r-s) \quad \text{et} \quad \Phi(r+s) - \Psi(r-s).$$

Les tangentes principales sont bissectrices des angles de chaque double canevas de losanges ; de plus, si l'on appelle Ω et Ω' deux de ces angles se correspondant d'une surface à l'autre dans le double canevas qui a pour coordonnées $\Phi(p) + \Psi(q)$, $\Phi(p) - \Psi(q)$, il viendra

$$\operatorname{tang}\frac{\Omega}{2} = \frac{Q}{P}\,\frac{\Phi'(p)}{\Psi'(q)}, \quad \operatorname{tang}\frac{\Omega'}{2} = \frac{bQ}{aP}\,\frac{\Phi'(p)}{\Psi'(q)};$$

P et Q désignant, comme précédemment, les coefficients de dp et de dq dans les expressions des côtés de chaque rectangle infiniment petit du double canevas orthogonal défini par les coordonnées p et q. On voit qu'en général il ne sera pas possible de disposer des deux fonctions arbitraires de manière que les angles des losanges varient suivant une loi donnée, même sur une seule des deux surfaces.

Dans les doubles canevas formés par les lignes dont l'angle éprouve en chaque point la plus grande altération, les demi-angles des parallélogrammes ont pour tangentes $\sqrt{\frac{a}{b}}$ sur l'une des surfaces, et $\sqrt{\frac{b}{a}}$ sur l'autre. Pour que l'un d'eux soit composé de losanges sur la première surface, il faut que $\frac{a}{b}$ soit le produit de $\frac{Q}{P}$, qui est une fonction donnée de p et de q, par deux autres fonctions, l'une de p seulement, l'autre de q seulement. Alors le canevas sera aussi formé de losanges sur la seconde surface.

35. Lorsque le rapport de P à Q est le produit d'une fonction de p par une fonction de q, on peut choisir Φ et Ψ, de manière que l'on ait

$$\frac{P}{\Phi'(p)} = \frac{Q}{\Psi'(q)},$$

ce qui, d'une part, rendra égaux les coefficients des différentielles des coordonnées dans les expressions des longueurs des côtés des rectangles déterminés sur la première surface par le double canevas orthogonal répondant à $\Phi(p)$ et $\Psi(q)$, et, d'autre part, donnera $\Omega = \frac{\pi}{2}$ pour le double canevas de losanges répondant à $\Phi(p) + \Psi(q)$ et $\Phi(p) - \Psi(q)$. Il y aura donc alors un double canevas orthogonal et un double canevas de losanges décomposant la première surface en carrés ; l'un sera formé par les diagonales de l'autre.

La condition analogue pour la seconde surface porterait sur aP et bQ.

Il ne peut y avoir de double canevas décomposant à la fois les deux surfaces en carrés, à moins que le mode de projection ne conserve les angles

Applications.

36. Une surface de révolution étant donnée, imaginons que, pour la représenter sur un plan, on développe, en vraie grandeur, l'un de ses méridiens suivant une droite, puis ses parallèles suivant d'autres droites perpendiculaires à la première. On obtiendra ainsi une projection qui jouira de la propriété de conserver les superficies; car, à chaque rectangle infiniment petit formé par deux méridiens et deux parallèles de la surface, correspondra sur la carte un parallélogramme ayant la même base et la même hauteur.

Soient, en un point quelconque, l l'angle de la tangente au méridien avec l'axe de la surface, r le rayon du parallèle, ρ le rayon de courbure du méridien; soient encore m l'angle du méridien du point considéré avec celui dont la projection est rectiligne, et s la longueur de l'arc de ce dernier mesurée à partir d'un parallèle convenu. Supposons, pour fixer les idées, que cet arc, dans le voisinage du point que l'on considère, tourne sa concavité vers l'axe de la surface, et que r diminue quand s augmente. Enfin appelons θ l'altération éprouvée sur la carte par l'angle du méridien avec le parallèle, en conservant la notation déjà adoptée pour les autres quantités résultant de la déformation. Aux coordonnées l et m correspond un double canevas formé de méridiens et de parallèles. Les variables r, ρ et s sont des fonctions connues de l. Nous avons d'abord à déterminer θ, h, k, a, b, ..., en fonction de l et de m.

Si l'on projette un arc infiniment petit de la section méridienne sur le rayon du parallèle qui passe par une de ses extrémités, et l'arc correspondant du méridien de la carte sur la droite qui représente ce parallèle, on formera deux triangles rectangles qui donneront respectivement

$$\frac{dr}{ds} = -\sin l, \quad \operatorname{tang}\theta = -m\frac{dr}{ds};$$

d'où l'on conclut

$$\operatorname{tang}\theta = m\sin l.$$

Les aires étant conservées, le rapport de surfaces, $hk\cos\theta$, doit se réduire à l'unité; et, comme déjà le rapport de longueurs k sur le parallèle est égal à un, il viendra

$$h = \operatorname{séc}\theta = \sqrt{1 + m^2\sin^2 l}, \quad k = 1.$$

Nous connaissons ainsi deux diamètres conjugués de l'ellipse indicatrice; les demi-axes de cette ellipse, qui sont ici inverses l'un de l'autre, seront fournis par les deux équations

$$a^2 + b^2 = 2 + m^2\sin^2 l, \quad ab = 1,$$

desquelles on tire

$$a = \sqrt{1 + \frac{m^2}{4}\sin^2 l} + \frac{m}{2}\sin l,$$

$$b = \sqrt{1 + \frac{m^2}{4}\sin^2 l} - \frac{m}{2}\sin l.$$

Il en résulte, pour la tangente de la moitié de la plus grande altération d'angle,

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{m}{2}\sin l = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\theta.$$

Chacune des deux directions dont l'angle est le plus altéré fait, avec la première tangente principale, un angle U pour lequel on a

$$U = \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}, \quad \operatorname{tang} U = a.$$

Les rapports de longueurs suivant ces deux directions étant égaux à l'unité, l'une d'elles se confond ici avec la tangente au parallèle. Cette remarque nous dispense d'avoir recours aux formules du n° 21 pour calculer les angles u et v de la première tangente principale avec la tangente au méridien et la tangente au parallèle; nous pouvons écrire immédiatement

$$u = \frac{\pi}{2} - \mathrm{U} = \frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}, \quad \operatorname{tang} u = b, \quad v = \mathrm{U}, \quad \operatorname{tang} v = a.$$

Sur la carte, on aura, pour les angles correspondants,

$$\mathrm{U}' = u, \quad \operatorname{tang} u' = b^3, \quad v' = u.$$

La tangente au méridien de la carte donnant, avec le parallèle, les directions de deux diamètres conjugués de l'ellipse indicatrice, le grand axe de cette ellipse passera à l'intérieur de l'angle aigu formé par ces deux lignes et la première tangente principale, à l'intérieur de l'angle droit dont cet angle aigu est la projection.

Les côtés de chaque rectangle infiniment petit du canevas tracé sur la surface de révolution ont pour longueurs les valeurs absolues de ds, ou $\rho\, dl$, et de $r dm$; d'ailleurs, sur la première tangente principale, les accroissements de l et de m sont ici de signes contraires; les deux couples de séries de lignes orthogonales seront donc fournis (n° 30) par les équations différentielles

$$\rho dl + a r dm = 0, \quad a \rho dl - r dm = 0,$$

dans lesquelles a doit être remplacé par sa valeur ci-dessus en fonction de l et de m. On peut encore prendre pour variables indépendantes s et m, ou bien r et m; alors les équations différentielles seront

$$ds + a r dm = 0, \quad a ds - r dm = 0,$$

et il faudra substituer à $\sin l$, dans a, l'expression de $-\frac{dr}{ds}$ en fonction de s, ou bien en fonction de r.

A cause de $u = \frac{\pi}{2} - \mathrm{U}$, les équations des lignes qui se projettent en vraie grandeur se réduisent à

$$dl = 0, \quad \cot 2\mathrm{U}\, ds + r\, dm = 0.$$

La première représente les parallèles, solution qui résulte de la définition même du mode de représentation. Comme on a

$$\cot 2\mathrm{U} = -\tang \omega = -\frac{m}{2} \sin l = \frac{m}{2} \frac{dr}{ds},$$

la seconde équation peut s'écrire

$$m\, dr + 2r\, dm = 0$$

et a pour intégrale

$$rm^2 = \text{const}.$$

Ainsi $\Phi(s)$ et $\Psi(rm^2)$ expriment les coordonnées des canevas dont les parallélogrammes ont des côtés de même longueur sur la surface et sur la carte.

37. Comme second exemple, nous prendrons encore la représentation d'une surface quelconque de révolution sur un plan. Cette fois, les méridiens seront tous figurés par des droites partant d'un même point et faisant entre elles des angles égaux à ceux des méridiens eux-mêmes, les parallèles par des circonférences ayant ce point pour centre. Nous appellerons R le rayon de l'une quelconque de ces circonférences; R sera une fonction connue de l'arc de méridien s, sur laquelle nous ne ferons aucune hypothèse; nous désignerons par ζ la dérivée de son logarithme népérien par rapport à s. Soient toujours r le rayon du parallèle de la surface et m l'angle d'un méridien quelconque avec un méridien convenu.

Les axes de l'ellipse indicatrice sont partout dirigés suivant la tangente au méridien et la tangente au parallèle ; ils ont pour longueurs $\frac{dR}{ds}$, abstraction faite du signe, et $\frac{R}{r}$.

La tangente de l'angle du méridien avec l'une ou l'autre des deux lignes dont l'angle éprouve la plus grande altération est $\sqrt{r\zeta}$.

Les doubles canevas orthogonaux auront pour coordonnées $\Phi(s)$ et $\Psi(m)$; l'un d'entre eux, celui qui correspond à

$$\Phi(s) = \int \frac{ds}{r}, \quad \Psi(m) = m,$$

sera formé de carrés sur la surface de révolution.

Les doubles canevas de losanges auront pour coordonnées $\Phi(s) + \Psi(m)$ et $\Phi(s) - \Psi(m)$. Celui d'entre eux pour lequel Φ et Ψ satisfont aux relations précédentes décomposera la surface en carrés ; il sera tracé par deux séries de loxodromies inclinées à 45 degrés sur les méridiens.

Si l'on pose

$$\sigma = \int \sqrt{\frac{\zeta}{r}}\, ds,$$

les doubles canevas auxquels donnent lieu les lignes dont l'angle éprouve le *maximum* d'altération seront fournis par les coordonnées $\Phi(\sigma + m)$ et $\Psi(\sigma - m)$; celui qui répond aux coordonnées $\sigma + m$, $\sigma - m$ est en même temps un double canevas de losange.

Parmi les systèmes de projections que nous venons de considérer, il y en a une infinité qui conservent les aires : ce sont ceux dans lesquels on prend

$$R = \sqrt{2\int r\, ds},$$

d'où résulte

$$\sigma = \int \frac{ds}{R} = \int \frac{dR}{r}.$$