NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LAGUERRE

Sur les courbes du quatrième degré qui ont trois points doubles d'inflexion, et en particulier sur la lemniscate

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 337-351

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__337_0>

SUR LES COURBES DU QUATRIÈME DEGRÉ QUI ONT TROIS POINTS DOUBLES D'INFLEXION, ET EN PARTICULIER SUR LA LEMNISCATE ;

PAR M. LAGUERRE.

1. Je dis qu'une courbe a un point double d'inflexion, lorsque chacune des deux branches de la courbe, qui se croisent en ce point, y présente une inflexion.

L'objet de cette Note est l'étude des courbes du quatrième degré possédant trois points doubles d'inflexion. Comme ces courbes appartiennent à la famille des courbes du quatrième degré, qui ont deux points doubles, on connaît par cela même un grand nombre de leurs propriétés; elles jouissent, en outre, de propriétés spéciales qui méritent d'être signalées.

En particulier, je distinguerai celle de ces courbes pour laquelle deux des points doubles d'inflexion sont les *ombilics* (*) du plan; la forme simple que prennent dans ce cas un grand nombre de théorèmes permet d'en poursuivre plus facilement les conséquences. Cette courbe n'est autre, d'ailleurs, que le lieu des projections du centre d'une hyperbole équilatère sur ses tangentes. C'est donc la lemniscate de Bernoulli.

2. En désignant par P,Q et R les trois points doubles d'inflexion de la courbe du quatrième degré K, je prendrai pour triangle de référence le triangle PQR; en

(*) Je désigne ainsi les deux points imaginaires, situés sur la droite de l'infini, qui sont communs à tous les cercles du plan.

sorte que les équations des côtés QR, RP, PQ seront respectivement

$$x = 0, \quad y = 0 \quad \text{et} \quad z = 0.$$

Cela posé, l'équation générale de la courbe K est, comme il est facile de le vérifier :

$$(1) \qquad ay^2z^2 + bz^2x^2 + cx^2y^2 = 0,$$

a, b et c désignant des coefficients constants.

Si l'on pose, pour abréger,

$$U = x\xi(bz^2 + cy^2) + y\eta(cx^2 + dz^2) + z\zeta(ay^2 + bx^2),$$
$$V = a\eta\zeta yz + b\zeta\xi zx + c\xi\eta xy$$

et

$$W = \frac{a\eta\zeta}{\xi} + \frac{b\zeta\xi}{\eta} + \frac{c\xi\eta}{\zeta},$$

on a, comme on le voit aisément, l'identité suivante :

$$(2) \qquad U = V\left(\frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta} + \frac{z}{\zeta}\right) - xyzW.$$

C'est sur cette identité que je m'appuierai principalement dans tout ce qui suit.

3. Je remarque d'abord que $U = 0$ est l'équation de la *cubique polaire* du point (ξ, η, ζ) par rapport à la courbe K. Soit M ce point, et supposons qu'il soit situé sur K, on a alors $W = 0$, et l'identité (2) montre que la cubique polaire de M se décompose en une droite et une conique; je dirai que cette droite et cette conique sont respectivement la *droite harmonique* et la *conique harmonique* du point M.

La cubique polaire de M passe, comme on le sait, par le point M, où elle touche K, par les points de contact des quatre tangentes que de M on peut mener à la courbe, et par les trois points doubles P, Q et R.

La droite harmonique de M, ne passant ni par M, ni par les points doubles, la conique harmonique de M ne rencontrant d'ailleurs K qu'en ces points, on en conclut les propositions suivantes :

La conique harmonique du point M *passe par les trois points doubles de la courbe, et touche cette courbe au point* M.

Si, d'un point quelconque M *de la courbe, on mène à cette courbe les quatre tangentes dont le point de contact est distinct de* M, *les quatre points de contact sont situés sur une même droite, qui est la droite harmonique de* M.

4. L'équation de la droite harmonique du point M est

$$\frac{x}{\xi}+\frac{y}{\eta}+\frac{z}{\zeta}=0.$$

C'est donc la droite polaire du point M relativement au triangle PQR.

En particulier, si les points Q et R sont les ombilics du plan et, par suite, si K est une *lemniscate,* la droite harmonique du point M s'obtient en prolongeant le segment MP d'une longueur égale à la moitié de ce segment, et en menant par l'extrémité de ce prolongement une perpendiculaire à MP.

Les droites harmoniques des différents points de la courbe K *enveloppent une conique* H *ayant pour équation*

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=0.$$

En effet, soient (ξ, η, ζ) les coordonnées d'un point M de K, on a entre ces coordonnées la relation

$$\frac{a}{\xi^2}+\frac{b}{\eta^2}+\frac{c}{\zeta^2}=0,$$

et, par suite, si l'on pose $\dfrac{\xi\xi'}{a}=\dfrac{\eta\eta'}{b}=\dfrac{\zeta\zeta'}{c}$,

$$\frac{\xi'^2}{a}+\frac{\eta'^2}{b}+\frac{\zeta'^2}{c}=0.$$

Le point (ξ', η', ζ') est donc sur la conique H, et la tangente menée en ce point à cette conique a pour équation

$$\frac{x\xi'}{a}+\frac{y\eta'}{b}+\frac{z\zeta'}{c}=0;$$

ou bien encore

$$\frac{x}{\xi}+\frac{y}{\eta}+\frac{z}{\zeta}=0.$$

C'est précisément l'équation de la droite harmonique du point M; la proposition énoncée est donc démontrée.

5. *Le lieu des pôles de chacun des côtés du triangle fondamental* PQR, *relativement aux coniques harmoniques des divers points de la courbe* K, *est la conique* H.

Considérons, par exemple, le côté QR, dont l'équation est $z=0$; en désignant par (ξ, η, ζ) un point quelconque de K, l'équation de la conique harmonique est

$$\frac{ayz}{\xi}+\frac{bzx}{\eta}+\frac{cxy}{\zeta}=0,$$

et les coordonnées du pôle de QR, relativement à cette courbe, sont données par les relations

$$\frac{az}{\xi}+\frac{cx}{\zeta}=0,\quad \frac{bz}{\eta}+\frac{cy}{\zeta}=0;$$

d'où

$$\frac{\frac{1}{\xi}}{\frac{x}{a}} = \frac{\frac{1}{\eta}}{\frac{y}{b}} = \frac{\frac{1}{\zeta}}{-\frac{z}{c}}.$$

On a d'ailleurs, puisque le point (ξ, η, ζ) est sur la courbe K, la relation

$$\frac{a}{\xi^2} + \frac{b}{\eta^2} + \frac{c}{\zeta^2} = 0;$$

d'où il vient, en remplaçant $\frac{1}{\xi}$, $\frac{1}{\eta}$ et $\frac{1}{\zeta}$ par leurs valeurs, l'équation suivante du lieu cherché :

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 0,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

6. Dans le cas de la lemniscate, c'est-à-dire si les points Q et R sont les ombilics du plan, il est facile de voir que la conique H est une hyperbole équilatère.

Les coniques harmoniques des divers points de la podaire sont alors des cercles passant par le point fixe P, et tangentes à la courbe. En vertu du théorème précédent, les centres de ces cercles décrivent l'hyperbole équilatère H; on peut donc énoncer les propositions suivantes :

Étant donnée une hyperbole équilatère H, *le lieu des points symétriques du centre* P *de cette conique, relativement à ses tangentes, est une lemniscate.*

Si, d'un point quelconque M *d'une lemniscate, on mène les quatre tangentes dont le point de contact est distinct de* M, *les quatre points de contact sont situés sur une même droite tangente à l'hyperbole* H *et per-*

pendiculaire au rayon PM; *cette droite et le point* M *étant d'ailleurs situés de côtés différents relativement au centre* P.

La cubique polaire du point M, *relativement à la lemniscate, se compose de la droite dont je viens de parler et du cercle passant par le point* P *qui touche la lemniscate au point* M; *le centre de ce cercle est sur l'hyperbole équilatère.*

7. Considérons une droite quelconque rencontrant la courbe K en quatre points, a, b, c et d. D'après une proposition connue, les cubiques polaires de ces points passent toutes par neuf mêmes points. Les cubiques polaires des deux points a et b se composent respectivement de deux coniques passant par les points P, Q, R et de deux droites; soit (a, b) le point d'intersection de ces deux droites.

La cubique polaire de c se compose également de la conique harmonique de ce point et d'une droite. La droite ne peut passer par le point (a, b); on pourrait en effet, dans ce cas, mener de ce point trois tangentes à la conique H, ce qui est évidemment impossible; il en résulte que la conique harmonique de c passe par le point (a, b).

D'où la proposition suivante :

Étant donnés, sur la courbe K, *quatre points en ligne droite, les droites harmoniques de ces quatre points forment un quadrilatère complet. Si l'on considère le triangle formé par trois quelconques de ces droites correspondant à trois des points mentionnés de la courbe, la conique harmonique du quatrième point est la conique circonscrite au triangle et passant par les trois points* P, Q, R.

Ainsi les neuf points fixes par lesquels passent les cubiques polaires des points de la droite *abcd* sont les points P, Q, R et les sommets du quadrilatère complet formé par les droites harmoniques des points *a*, *b*, *c* et *d*.

Dans le cas de la lemniscate, la proposition précédente peut s'énoncer ainsi :

Étant donnés trois points d'une lemniscate situés sur une même ligne droite D, *le cercle circonscrit au triangle formé par les droites harmoniques de ces trois points passe par le centre de la lemniscate et touche cette courbe en son quatrième point de rencontre avec* D.

8. Des considérations précédentes résulte encore immédiatement que *si, par un point quelconque* M *de la courbe* K, *on mène une sécante rencontrant la courbe en trois autres points, les droites harmoniques de ces points forment un triangle circonscrit à la conique* H *et inscrit dans la conique harmonique du point* M.

En appelant (M) cette conique harmonique, on voit que, quand la sécante tourne autour du point M, les côtés du triangle mobile enveloppent H, tandis que ses sommets décrivent (M).

D'où la proposition suivante :

Du point M *on peut mener à la courbe* K *quatre tangentes touchant la courbe en quatre points a, b, c, d, situés en ligne droite ; ces quatre tangentes rencontrent de nouveau la courbe en quatre autres points* α, β, γ *et* δ.

Les tangentes communes à H *et à* (M) *sont les droites harmoniques des points* α, β, γ *et* δ ; *les tangentes, menées à* H *aux points où cette courbe rencontre* (M), *sont les droites harmoniques des points a, b, c et d.*

9. Généralement (*), si, des seize points d'intersection de deux courbes du quatrième degré, huit sont situés sur une courbe du deuxième degré, les huit autres sont également situés sur une courbe du deuxième degré.

Soit M un point quelconque de la courbe K, les quatre tangentes issues de ce point peuvent être considérées comme une courbe du quatrième ordre rencontrant K en seize points, dont huit (à savoir les points de contact des tangentes) peuvent être considérés comme étant situés sur une droite double. Les huit autres points de rencontre sont les quatre points α, β, γ et δ et le point M, que l'on doit considérer comme quadruple.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Les quatre tangentes menées à K *par un point* M *de cette courbe la rencontrent en quatre points distincts de* M *et des points de contact ; la conique, déterminée par* M *et ces quatre points, a avec la courbe* K, *au point* M, *un contact du troisième ordre.*

10. Je reviens maintenant à l'identité (2).

En considérant ξ, η, ζ comme des coordonnées courantes et x, y, z comme les coordonnées d'un point donné A, on voit que $U = 0$ est l'équation de la *droite polaire* du point A relativement à la courbe K, et $W = 0$ l'équation de cette courbe elle-même.

Cela posé, on peut énoncer le théorème suivant :

Étant donné un point quelconque A *du plan, la conique polaire du point* A, *relativement au triangle* PQR, *rencontre la courbe* K, *indépendamment des points* P, Q *et* R, *en deux autres points. La droite qui*

(*) SALMON, *Higher plane curves*, seconde édition, p. 16.

joint ces deux points est la droite polaire du point A, *relativement à la courbe* K.

En effet, la conique polaire du point A, relativement au triangle PQR, a pour équation

$$\frac{x}{\xi}+\frac{y}{\eta}+\frac{z}{\zeta}=0,$$

et, en vertu de l'identité (2), les points où elle rencontre (indépendamment des points P, Q et R) la courbe K, dont l'équation est $W=0$, sont bien situés sur la droite $U=0$.

11. Soit une droite quelconque D rencontrant K aux points a, b, c et d; on sait que cette droite a (relativement à K) six pôles qui sont les points communs aux cubiques polaires de a, b, c et d.

Du théorème précédent, il résulte que :

Les six pôles de la droite D, *relativement à* K, *sont les pôles, relativement au triangle* PQR, *des six coniques que l'on peut mener par les points* P, Q, R *et les six couples de points* a, b; a, c; a, d; b, c; b, d; c, d.

D'où encore cette conclusion :

Si une droite, passant par deux points α *et* β *de la courbe* K, *touche cette courbe en un troisième point* γ, *le pôle de la conique* PQR$\alpha\beta$, *relativement au triangle* PQR, *est le point de contact* γ.

12. Dans le cas de la lemniscate, c'est-à-dire quand les points Q et R sont les ombilics du plan, la conique polaire du point A, relativement au triangle PQR, est le cercle passant par le point P et ayant pour centre le point A′ symétrique de A par rapport au point P.

Les propositions précédentes peuvent alors s'énoncer ainsi qu'il suit :

Une droite D *rencontrant en quatre points une lemniscate, les six pôles de* D, *relativement à la lemniscate, sont les symétriques, par rapport au centre* P *de la courbe, des centres des six cercles que l'on peut faire passer par le point* P *et deux quelconques des points d'intersection de* D *et de la lemniscate.*

Si une droite, passant par deux points α *et* β *d'une lemniscate, touche cette courbe au point* γ, *le point symétrique du point* γ, *relativement au centre de la lemniscate, est le centre du cercle qui passe par ce centre et les deux points* α *et* β.

13. Pour abréger les considérations qui suivent, je considérerai particulièrement une lemniscate; les propositions que j'obtiendrai ainsi subsisteront d'ailleurs évidemment pour une courbe quelconque à trois points doubles d'inflexion.

Soient a et b deux des points où une droite D rencontre une lemniscate, le point symétrique, par rapport au centre P de cette courbe, du centre du cercle circonscrit au triangle Pab est, d'après ce que j'ai dit plus haut, un des pôles de la droite D par rapport à la lemniscate.

Des propositions énoncées précédemment (n° 6), il résulte d'ailleurs que ce pôle est le point de rencontre des *droites harmoniques* des points a et b.

D'où cette proposition :

Les six pôles d'une droite relativement à une courbe K *sont les six sommets du quadrilatère complet formé par les droites harmoniques des quatre points où la droite rencontre la courbe* K (*).

(*) *Voir* n° 7.

14. Si une droite tourne autour d'un point A, on sait que la cubique polaire de ce point est le lieu des pôles de la droite mobile.

D'où la conclusion suivante :

Si, par un point A, *on mène une sécante mobile, et si l'on désigne par a et b deux des points où elle rencontre la courbe* K, *le lieu des intersections des droites harmoniques des points a et b est la cubique polaire de* A *relativement à la courbe* K.

Si l'on considère en particulier une des sécantes qui passent par le point A, les six pôles de cette sécante sont les sommets du quadrilatère complet déterminé par les droites harmoniques des points d'intersection de la sécante avec K ; on voit que, quand la sécante tourne autour du point A, les côtés de ce quadrilatère roulent sur la conique H pendant que ses six sommets décrivent la cubique polaire du point A.

15. Considérons une droite D rencontrant la courbe K aux points α, β, et touchant cette courbe au point γ; il est clair que les droites harmoniques des points α et β se croisent au point γ. La conique harmonique du point γ passant par ce dernier point, les droites dont je viens de parler la rencontrent de nouveau en deux points, que je désignerai respectivement par *a* et *b*. Cela posé, il résulte de ce qui est établi plus haut que la droite *ab* est la droite harmonique du point γ.

D'où la proposition qui suit :

Si d'un point γ situé sur la courbe K *on mène deux tangentes à la conique* H, *ces deux tangentes sont les droites harmoniques des points où la tangente, menée en γ à la courbe* K, *rencontre cette courbe; ces tan-*

gentes rencontrent de nouveau H *en deux points, et la droite qui joint ces deux points est la droite harmonique du point* γ.

16. Étant donnés, sur une droite, deux groupes de trois points, α, β, γ et α', β', γ', je dirai que ces deux groupes forment un *système harmonique* (*) si, ces deux groupes étant respectivement déterminés par les racines des deux équations

$$\Omega = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$$

et

$$\Omega' = a'x^3 + 3b'x^2y + 3c'xy^2 + d'y^3,$$

l'invariant quadratique des deux formes Ω et Ω', à savoir :

$$I = ad' - 3bc' + 3cb' - da',$$

est identiquement nul.

Cela posé, on peut énoncer ce théorème remarquable :

Si l'on considère les cubiques polaires de deux points quelconques du plan, relativement à la courbe K, *toute droite tangente à la conique* H *rencontre les deux polaires en deux groupes de trois points qui forment un système harmonique.*

Pour démontrer ce théorème, je remarque que l'équation d'une tangente quelconque à la conique H est

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 0,$$

(*) *Voir* à ce sujet ma Note *Sur les singularités des courbes de quatrième classe* (*Journal de Mathématiques*, 3e série, t. I, p. 265).

α, β et γ étant liés entre eux par la relation

$$\frac{a}{\alpha^2}+\frac{b}{\beta^2}+\frac{c}{\gamma^2}=0.$$

La cubique polaire d'un point quelconque (ξ, η, ζ) du plan a pour équation

$$x\xi(bz^2+cy^2)+y\eta(cx^2+az^2)+z\zeta(ay^2+bx^2)=0.$$

Remplaçons, dans cette équation, c et z par leurs valeurs tirées des relations précédentes, il viendra, en faisant, pour abréger, $\gamma=1$ et $\zeta=1$,

$$\frac{b(\xi-\alpha)}{\alpha^2}x^3+\left[\frac{2b\xi}{\alpha\beta}-\frac{b(\eta+\beta)}{\beta^2}\right]x^2y$$
$$+\left[\frac{2a\eta}{\alpha\beta}-\frac{a(\xi+\alpha)}{\alpha^2}\right]xy^2+\frac{a(\eta-\beta)}{\alpha^2}y^3=0;$$

ou encore, si l'on pose

$$\xi-\alpha=X \quad \text{et} \quad \eta-\beta=Y,$$

$$\frac{bX}{\alpha^2}x^3+\frac{b}{\alpha\beta^2}(2\beta X-\alpha Y)x^2y$$
$$+\frac{a}{\alpha^2\beta}(2\alpha Y-\beta X)xy^2+\frac{aY}{\beta^2}y^3=0.$$

Si l'on considère la polaire d'un autre point (ξ', η', ζ') du plan, on aura de même, pour déterminer les points où elle rencontre la tangente à la conique H, l'équation

$$\frac{bX'}{\alpha^2}+\frac{b}{\alpha\beta^2}(2\beta X'-\alpha Y')x^2y$$
$$+\frac{a}{\alpha^2\beta}(2\alpha Y'-\beta X')xy^2+\frac{\beta^2}{aY'}y^3=0,$$

où j'ai posé

$$\xi'-\alpha=X' \quad \text{et} \quad \eta'-\beta=Y'.$$

En désignant par I l'invariant quadratique des deux formes précédentes, on a

$$3I = \frac{3ab(XY' - YX')}{\alpha^2\beta^2} - \frac{ab}{\alpha^3\beta^3}[(2\beta X - \alpha y)(2\alpha Y' - \beta X') - (2\beta X' - \alpha Y')(2\alpha Y - \beta X)];$$

en effectuant le calcul, on trouve $I = 0$. Le théorème est donc démontré.

17. Si l'on considère deux points A et B du plan et leurs cubiques polaires relativement à K, ces deux cubiques sont coupées harmoniquement, comme je viens de l'établir, par toutes les droites tangentes à la conique H.

On démontrerait facilement qu'elles sont également coupées harmoniquement par toutes les droites qui passent par le pôle de la droite AB, relativement à cette conique. Pour abréger, je supprime la démonstration de cette proposition, qui, d'ailleurs, est renfermée comme cas particulier dans un théorème général, relatif aux courbes du quatrième ordre, que j'ai donné dans ma Note, déjà citée, *Sur les singularités des courbes de quatrième classe*.

Ce théorème peut s'énoncer ainsi qu'il suit :

Étant donnée une courbe du quatrième degré R, *les tangentes aux vingt-quatre points d'inflexion de cette courbe sont tangentes à une même courbe de quatrième classe* S. *Si l'on considère deux points quelconques* A *et* B *du plan, toute droite menée tangentiellement à la cubique polaire de la droite* AB, *relativement à la courbe de quatrième classe* S, *rencontre les polaires des points* A *et* B, *relativement à la courbe* R, *en deux groupes de trois points, qui forment un système harmonique* (*).

(*) *Loc. cit.*, p. 266. Il est presque inutile de dire qu'à l'endroit cité le théorème est énoncé relativement à une courbe de quatrième classe.

Dans le cas où la courbe R est une courbe K à trois points doubles d'inflexion, la courbe de quatrième classe S se réduit à la conique H, celle-ci étant considérée comme double; d'où l'on déduit facilement les propriétés que j'ai énoncées précédemment.

18. En terminant cet exposé des propriétés spéciales les plus simples des courbes du quatrième degré à trois points doubles d'inflexion, je ferai remarquer que la développée d'une conique ayant trois tangentes doubles de rebroussement, sa courbe corrélative est de l'espèce de celles que je viens d'étudier.

Toutes les propriétés qui précèdent peuvent donc être considérées comme des propriétés des développées des coniques.