Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 325-335

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__325_2>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1233

(voir 2ᵉ série, t. XVI, p. 240);

PAR M. MORET-BLANC.

Étant donnée une ellipse, soient a et b deux points quelconques réciproques par rapport au cercle, lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique; on *prend le point β symétrique du point b par rapport à la polaire de a : démontrer que les points a et β ainsi que les deux foyers de l'ellipse sont situés sur un même cercle que ces points divisent harmoniquement.*

(LAGUERRE.)

Soient

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$$

l'équation de l'ellipse; x_1, mx_1 les coordonnées du point a; x_2, mx_2 celles du point b, avec la relation

$$(1 + m^2)x_1x_2 = a^2 + b^2.$$

L'équation de la polaire du point a est

$$ma^2x_1y + b^2x_1x = a^2b^2,$$

et celle de la perpendiculaire abaissée du point b sur cette droite

$$y - mx_2 = \frac{ma^2}{b^2}(x - x_2),$$

ou

$$ma^2x - b^2y = mc^2x_2.$$

On tire de ces équations les coordonnées du pied de la perpendiculaire

$$x = \frac{a^2(b^4 + m^2c^2x_1x_2)}{(m^2a^4 + b^4)x_1}, \quad y = \frac{mb^2(a^4 - c^2x_1x_2)}{(m^2a^4 + b^4)x_1}.$$

On a ensuite, en appelant x', y' les coordonnées du point β,

$$x' = 2x - x_2 = \frac{2a^2b^4 + (2c^2 - a^2)m^2a^2x_1x_2 - b^4x_1x_2}{(m^2a^4 + b^4)x_1},$$

$$y' = 2y - mx_2 = \frac{[2a^4b^2 + (2c^2 - b^2)b^2x_1x_2 - m^2a^4x_1x_2]m}{(m^2a^4 + b^4)x_1},$$

et, en remplaçant x_1x_2 par sa valeur $\frac{a^2 + b^2}{1 + m^2}$ et réduisant,

$$x' = \frac{c^2}{(1 + m^2)x_1}, \quad y' = -\frac{mc^2}{(1 + m^2)x_1}.$$

L'équation générale des cercles passant par les foyers est

$$x^2 + y^2 - 2\lambda y - c^2 = 0;$$

et si le cercle passe par le point a, on a

$$(1 + m^2)\, x_1^2 - 2m\lambda x_1 - c^2 = 0,$$

d'où

$$2\lambda = \frac{(1 + m^2)\, x_1^2 - c^2}{m x_1}.$$

L'équation du cercle passant par le foyer et le point a est donc

$$x^2 + y^2 - \frac{(1 + m^2)\, x_1^2 - c^2}{m x_1}\, y - c^2 = 0.$$

Elle est vérifiée par les coordonnées x', y' du point β : donc les points a, β et les deux foyers sont sur un même cercle.

La droite $a\beta$ et la tangente en a au cercle ont respectivement pour équations

$$(m x_1 - y')\, x - (x_1 - x')\, y = (m x' - y')\, x_1,$$

$$2 x_1 x - 2 m x_1 y = (1 + m^2)\, x_1^2 + c^2;$$

elles coupent l'axe focal en des points e, f dont les abscisses sont

$$x = \frac{(m x' - y')\, x_1}{m x_1 - y_1} = \frac{2 c^2 x_1}{(1 + m^2)\, x_1^2 + c^2},$$

$$x = \frac{(1 + m^2)\, x_1^2 + c^2}{2 x_1}.$$

On a donc

$$Oe \,.\, Of = c^2.$$

Ces deux droites et celles qui joignent le point a aux deux foyers, divisant harmoniquement l'axe focal, forment un faisceau harmonique, et il en est de même de celles qui joignent un point quelconque de la circonférence aux points a, β et aux deux foyers, ce qui démontre la seconde partie du théorème.

Le théorème subsisterait évidemment si la conique était une hyperbole.

Note. — La même question a été résolue par M. H. Lez et par M. F. Pisani, qui démontre en outre une série de théorèmes concernant des groupes de quatre points analogues aux précédents et situés respectivement sur des cercles.

Question 1233

(voir 2e série, t. XVI, p. 286);

PAR M. MORET-BLANC.

On donne une ellipse de centre O. *Prenons un point m sur cette courbe, et appelons* μ *le centre de courbure de l'ellipse correspondant à m. Menons la droite* μO *et désignons par t le point où elle rencontre la tangente en m à l'ellipse. On demande :*

1° *Quel est le lieu décrit par t lorsque m parcourt l'ellipse;*

2° *De démontrer que la tangente en t à ce lieu rencontre* $m\mu$ *en un point r tel que* $mr = \frac{m\mu}{4}$.

(MANNHEIM.)

1° Soit

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \tag{1}$$

l'équation de l'ellipse. Les coordonnées ξ, η du centre de courbure correspondant au point $m(x, y)$ sont déterminées par les équations

$$x - \xi + (y - \eta)\frac{dy}{dx} = 0, \quad 1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y - \eta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

où

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

On en tire

$$\eta = -\frac{c^2y^3}{b^4}, \quad \xi = \frac{c^2x^3}{a^4}.$$

La ligne μO a pour équation

$$(2)\qquad \frac{Y}{X} = \frac{\eta}{\xi} = -\frac{a^4 y^3}{b^4 x^3},$$

et la tangente en m à l'ellipse,

$$(3)\qquad a^2 y Y + b^2 x X = a^2 b^2.$$

On tire de ces deux équations les coordonnées du point t,

$$X = -\frac{a^2 b^6 x^3}{a^6 y^4 - b^6 x^4}, \quad Y = \frac{a^6 b^2 y^3}{a^6 y^4 - b^6 x^4}.$$

En différentiant par rapport à la variable indépendante x, dont y est fonction en vertu de l'équation de l'ellipse, on trouve

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{a^2 y (a^6 y^4 + 3 b^6 x^4 + 4 a^2 b^4 x^2 y^2)}{b^2 x (b^6 x^4 + 3 a^6 y^4 + 4 a^4 b^2 x^2 y^2)},$$

ou, en éliminant y dans les parenthèses au moyen de l'équation de l'ellipse,

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{a^2 y [a^6 + 2 a^2 (b^2 - c^2) x^2 + c^2 x^4]}{b^2 x (3 a^6 - 2 a^4 c^2 x^2 - c^2 x^4)},$$

coefficient angulaire de la tangente en t à la courbe lieu du point t.

On obtiendra l'équation de cette courbe en éliminant x et y entre les équations (1), (2) et (3). L'équation (2) peut s'écrire

$$\frac{a^4 y^3}{Y} = -\frac{b^4 x^3}{X} = \lambda^3,$$

d'où

$$y = \lambda \frac{Y^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}}, \quad x = -\lambda \frac{X^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{4}{3}}}.$$

En reportant ces valeurs dans les équations (1) et (3), et éliminant λ, on obtient l'équation du lieu du point t :

$$(4)\qquad \left[\left(\frac{Y^2}{b}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{X^2}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^2 = (aX)^{\frac{2}{3}} + (bY)^{\frac{2}{3}}.$$

2° Si l'on prend le point r au quart de $m\mu$, ses coordonnées sont

$$x_1 = \frac{3x+\xi}{4} = \frac{3a^4x + c^2x^3}{4a^4}, \quad y_1 = \frac{3y+\eta}{4} = \frac{3b^4y - c^2y^3}{4b^4}.$$

Le coefficient angulaire de la droite tr est

$$\frac{Y - y_1}{X - x_1} = -\frac{a^2y[4a^8b^6y^2 - (a^4y^4 - b^4x^4)(3a^2b^4 - a^2c^2y^2)]}{b^2x[4a^6b^8x^2 + (a^4y^4 - b^4x^4)(3a^4b^2 + b^2c^2x^2)]}$$
$$= -\frac{a^2y[a^{10} + a^6(2b^2 - 3c^2)x^2 - a^2c^2(3c^2 - b^2)x^4 - c^4x^6]}{b^2x[3a^{10} - a^6(3c^2 + 2a^2)x^2 + a^4c^2x^4 + c^4x^6]},$$

et, en divisant haut et bas par $a^4 - c^2x^2$,

$$\frac{Y - y_1}{X - x_1} = -\frac{a^2y[a^6 + 2a^2(b^2 - c^2)x^2 + c^2x^4]}{b^2x(3a^6 - 2a^4c^2x^2 - c^2x^4)} = \frac{dY}{dX};$$

donc la tangente en t à la courbe (4) passe par le point r situé sur $m\mu$, de telle sorte que $mr = \frac{m\mu}{4}$.

On obtient encore ce point en cherchant l'intersection de la tangente en t à la courbe (4) et de la normale en m à l'ellipse.

La courbe, lieu du point t, a quatre points de rebroussement aux quatre sommets de l'ellipse, et quatre asymptotes parallèles aux droites $Y = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}\,X$, c'est-à-dire parallèles aux normales menées du centre à la développée de l'ellipse. Les points m correspondant aux points t à l'infini sont donnés par la relation

$$a^6y^4 = b^6x^4 \quad \text{ou} \quad a^3y^2 = b^3x^2,$$

d'où

$$x = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{(a+b)^{\frac{1}{2}}}, \quad y = \frac{b^{\frac{3}{2}}}{(a+b)^{\frac{1}{2}}}.$$

Le coefficient angulaire de la tangente en ce point est bien $\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$, et l'ordonnée à l'origine $\pm\sqrt{b(a+b)}$.

Les asymptotes ont donc pour équations

$$Y = \pm X\sqrt{\frac{b}{a}} \pm \frac{3}{4}\sqrt{b(a+b)}.$$

On a ainsi une idée assez nette de la forme de la courbe.

La distance du centre aux asymptotes est $\sqrt{ab}$.

Note. — La même question a été résolue par M. Sondat

Question 1238

(voir 2e série, t. XVI, p. 28),

Par M. S. REALIS.

A chaque racine réelle, k, de l'équation à coefficients réels

$$y^3 + (4p+1)y + 8q = 0$$

correspond une racine appartenant à l'équation

$$x^3 + px + q = 0,$$

et comprise entre $\frac{k-1}{2}$ et $\frac{k+1}{2}$.

Soit k une racine réelle de l'équation

$$y^3 + (4p+1)y + 8q = 0;$$

posons

$$F(x) = x^4 + 2px^2 + 4qx + \frac{(k-1)(k+1)(3k^2+8p+1)}{16};$$

d'où

$$F'(x) = 4(x^3 + px + q).$$

On trouve, en substituant successivement $\frac{k-1}{2}$ et $\frac{k+1}{2}$ à x dans $F(x)$,

$$F\left(\frac{k-1}{2}\right) = \frac{k-1}{4}[k^3 + (4p+1)k + 8q],$$

$$F\left(\frac{k+1}{2}\right) = \frac{k+1}{4}[k^3 + (4p+1)k + 8q],$$

c'est-à-dire, puisque k est racine de l'équation en y,

$$F\left(\frac{k-1}{2}\right) = 0, \quad \text{et} \quad F\left(\frac{k+1}{2}\right) = 0.$$

Ainsi $\frac{k-1}{2}$ et $\frac{k+1}{2}$ sont racines de l'équation $F(x) = 0$, et par conséquent, il y a entre elles, au moins, une racine de l'équation dérivée $F'(x) = 0$.

Note. — Autres solutions de MM. Moret-Blanc; Dunoyer, élève en Mathematiques spéciales au lycée de Marseille; Eugène Delmas, elève du lycée de Lyon; Beaugey, du lycée de Grenoble; Barthe, du lycée de Bordeaux.

Question 1258

(voir 2e série, t. XVII, p. 2'8);

PAR M. A. MOREL.

Soient ABC *un triangle;*

D, E, F *les pieds des hauteurs menées des sommets* A, B, C;

O *le point d'intersection de la ligne* EF *avec une parallèle au côté* BC, *menée par le sommet* A;

a le milieu de BC;

G *et* H *les points d'intersection de* AO *et d'un cercle décrit du point* O *comme centre avec* O*a pour rayon.*

On demande de démontrer :

1° *Que les droites* aG *et* aH *sont, respectivement, les bissectrices des angles* OaB *et* OaC ;

2° *Que, si la hauteur* AD *coupe le cercle au point* K, *on a* $AK = Ba$ (*). (Genty.)

1° Le triangle isoscèle OHa nous donne $OaH = OHa$; mais, d'après la construction, $OHa = HaC$, comme angles alternes-internes. Donc aH est bissectrice de l'angle OaC. La droite aG étant perpendiculaire sur aH, cette droite aG est bissectrice de l'angle OaB.

2° Les angles OAF, OEA sont tous deux égaux à l'angle B du triangle; donc $\overline{OA}^2 = OE \times OF$. Mais, le quadrilatère BFEC étant inscriptible,

$$OE \times OF = \overline{Oa}^2 - \overline{Ba}^2,$$

puisque le rayon du cercle circonscrit au quadrilatère est Ba. On a donc

$$\overline{OA}^2 = \overline{Oa}^2 - \overline{Ba}^2, \quad \text{d'où} \quad \overline{Ba}^2 = \overline{Oa}^2 - \overline{OA}^2 = \overline{AK}^2,$$

puisque AK est perpendiculaire sur le diamètre GH; donc $Ba = AK$.

Note. — Autres solutions de MM. J. Chambon; Moret-Blanc; Michel; Pisani.

Question 1260

(voir 2ᵉ série, t. XVII, p. 238);

PAR M. A. MOREL.

D'un point O *pris sur une circonférence, dont un diamètre est* OE, *on décrit une circonférence qui rencontre la première en des points* A, B; *puis, on joint*

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

un point quelconque C *de la deuxième circonférence aux points* A, B, E *par des droites qui coupent la première en des points* F, D, G.

1° *Les droites* EF, ED *sont respectivement parallèles à* CB, CA ;

2° *La droite* CE *fait, avec les côtés du triangle* CAB, *les mêmes angles que la médiane partant du sommet* C ;

3° *La droite* CG *est moyenne géométrique entre* GA *et* GB (*). (A. Cambier.)

1° Je joins le point B au point E ; la droite BE est tangente à la circonférence O. Il en résulte que les angles ABE, ACD sont égaux. Mais les angles ABE, AFE, inscrits dans un même segment de cercle, sont aussi égaux entre eux ; il y a donc égalité entre les angles ACD, AFE ; et, parce que ces derniers angles ont la position d'angles correspondants, les droites FE, CB sont parallèles.

Les arcs BE, AE étant égaux, on a

$$BDE = AFE = ACD;$$

il s'ensuit, en ayant égard au parallélisme des droites FE, CB, que les droites ED, CA sont aussi parallèles.

2° La droite AB, perpendiculaire à OE, en un point P, est la polaire du point E, par rapport à la circonférence O ; et, par conséquent, les droites menées de P aux points C, M, où la droite EC rencontre la circonférence O, sont également inclinées sur OE, et, par suite, sur AB. On en conclut facilement que BM = AK, le point K étant à la rencontre de la circonférence O

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

et de la droite CP. Donc l'angle $ACP = MCB$ et $ACM = KCB$ (*).

3° Dans le triangle GAC, l'angle AGC est égal à l'angle BGC du triangle GBC ; l'angle GAC est égal à l'angle GCB. Les triangles GAC, GBC sont donc semblables, et leurs côtés homologues donnent $\frac{CG}{BG} = \frac{GA}{CG}$; la troisième partie de la proposition est ainsi démontrée.

Note. — La même question a été résolue par MM. Kruschwitz ; Ch. Richard ; Moret-Blanc ; Pisani ; Robaglia ; Fauquembergue ; Armand Bertrand.