NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Démonstrations directes de quelques propriétés connues relatives à la courbe enveloppe d'un segment de droite de longueur constante qui se meut dans un angle

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 321-323

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__321_0>

DÉMONSTRATIONS DIRECTES DE QUELQUES PROPRIÉTÉS CONNUES RELATIVES A LA COURBE ENVELOPPE D'UN SEGMENT DE DROITE DE LONGUEUR CONSTANTE QUI SE MEUT DANS UN ANGLE;

PAR M. A. M.

Soient xoy l'angle donné et ab le segment mobile(*). Ce segment se déplace de façon que a reste sur ox, et b sur oy. Pour un déplacement infiniment petit de ab, on obtient le centre instantané de rotation c en élevant respectivement à ox et oy les perpendiculaires ac, bc.

Les quatre points o, a, c, b sont sur une circonférence dont oc est un diamètre. Comme ce diamètre est égal à $\dfrac{ab}{\sin xoy}$, sa longueur est constante, quelle que soit la position de ab; par suite, *pendant le déplacement continu de ab, les points tels que c sont une circonférence de centre o.*

La perpendiculaire ce à ab rencontre cette droite au point e, où celle-ci touche son enveloppe. Abaissons aussi la perpendiculaire of sur ab : *les points e et f sont à égales distances du milieu de ab.*

Du centre i de la circonférence $oacb$ menons le diamètre perpendiculaire à ab, et appelons g et h les extrémités de ce diamètre. *Les droites og, oh, perpendiculaires l'une à l'autre, sont les bissectrices des angles formés par ox et oy; elles sont alors fixes pendant le déplacement de ab.*

Appelons p et q les points de rencontre de og et oh

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

avec la normale *ce*. Le segment *pq* est double du diamètre *gh*, il est donc de grandeur constante; par suite, *pendant le déplacement de ab, les normales telles que ce enveloppent une courbe qu'on peut obtenir en déplaçant le segment pq dans l'angle droit goh.*

Menons le diamètre *mn* parallèlement à *ab*, la distance entre ces droites reste la même pendant le déplacement de *ab*. L'enveloppe de *mn* est alors une courbe parallèle à la courbe enveloppe de *ab*. Ces deux enveloppes ont même développée qui est l'enveloppe de *pq*. Le segment *mn* de grandeur constante se déplace dans l'angle droit fixe *mon*. Ainsi *l'enveloppe de mn a pour développée une courbe qui lui est semblable; le rapport de similitude est de* 1 à 2.

Abaissons sur *pq* la perpendiculaire *or* et prenons le point λ symétrique de *r* par rapport au point *c*, milieu de *pq*. Le segment *pq* touche son enveloppe au point λ; ce point est alors le centre de courbure de la courbe enveloppe de *mn*. Appelons *l* le point où *pq* rencontre *mn* et *j* le point où *oj* rencontre cette même droite. Il résulte de la construction qui donne λ que *le rayon de courbure* $l\lambda$ *est égal à* 3 *fois oj*. Désignons par *t* le point où la droite $o\lambda$ coupe *mn*. D'après ce que nous venons de dire, le segment *ot* est le quart de $o\lambda$. Le lieu (*t*) des points, tels que *t*, est alors une courbe semblable à la courbe (λ), lieu des points λ. La tangente à (*t*) en *t* est alors perpendiculaire à *mn*, c'est-à-dire que (*t*) rencontre à angle droit les droites, telles que *mn*; donc (*t*) *est la développante de l'enveloppe de mn.*

Les côtés de l'angle droit *poq* interceptent un segment de grandeur constante sur la parallèle à *pq* menée du point *t*. Ce segment, égal à la moitié de *mn*, en se déplaçant dans l'angle *poq*, a pour enveloppe la développante (*t*) de la courbe enveloppe de *mn*. *La déve-*

loppante (t) *est alors semblable à la courbe enveloppe de* mn.

Lorsque le segment mn est en $m'n'$ également inclinée sur om et sur on, le point t', tel que t, est le milieu de $m'n'$; il est aussi le point où $m'n'$ touche la courbe enveloppe (mn). Appelons μ et ν les points où cette enveloppe touche om et on. La développante (t) part de t' et coupe $o\mu$ au point μ', tel que $o\mu' = \frac{o\mu}{4}$. Par suite l'arc $\mu t'$ de l'enveloppe (mn) a pour longueur $\frac{3}{4}\, mn$, *et la longueur totale de cette courbe est* $6.mn$.