NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. TOURRETTES

Question de mécanique élémentaire donnée au concours d'agrégation de 1872

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 319-320

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__319_1>

QUESTION DE MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE

DONNÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1872;

SOLUTION DE M. A. TOURRETTES.

On donne une série de circonférences situées dans un même plan, ayant leurs centres en ligne droite, se touchant extérieurement, de manière que chacune soit tangente à celle qui la précède et à celle qui la suit, et dont les rayons forment une progression géométrique décroissante. On demande le centre de gravité du système prolongé à l'infini.

Soient a le rayon du premier cercle dont le centre est pris pour origine; q la raison de la progression; x la distance du centre de gravité du système à l'origine.

Les rayons seront

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ \ldots,\ aq^n;$$

les circonférences

$$2\pi a,\ 2\pi aq,\ 2\pi aq^2,\ \ldots,\ 2\pi aq^n,$$

et les distances de leurs centres à l'origine

$$0,\ a + aq,\ a + 2aq + aq^2,\ \ldots,\ a + 2aq + 2aq^2 + \ldots + aq^n.$$

En appliquant le théorème des moments, on aura une égalité dont le premier membre sera

$$x(2\pi a + 2\pi a q + 2\pi a q^2 + \dots) \quad \text{ou} \quad \frac{2\pi a x}{1-q}.$$

Le deuxième membre aura pour expression

$$2\pi a^2[(q + q^2) + (q^2 + 2q^3 + q^4) \\ + (q^3 + 2q^4 + 2q^5 + q^6) + \dots]$$

ou bien

$$2\pi a^2[q + 2q^2 + 3q^3 + \dots + nq^n \\ + nq^{n+1} + (n-1)q^{n+2} + \dots + q^{2n}].$$

Or, la première partie de la parenthèse

$$q + 2q^2 + \dots + nq^n$$

a pour valeur

$$\frac{q}{(1-q)^2} - \frac{q^{n+1}}{(1-q)^2} - \frac{nq^{n+1}}{1-q},$$

et la deuxième est plus petite que

$$n(q^{n+1} + q^{n+2} + \dots + q^{2n}),$$

ou bien

$$\frac{nq^{n+1}(1-q^n)}{1-q}.$$

La parenthèse est donc plus petite que la somme suivante :

$$\frac{q}{(1-q)^2} - \frac{q^{n+1}}{(1-q)^2} - \frac{nq^{n+1}}{1-q} + \frac{nq^{n+1}(1-q^n)}{1-q},$$

qui se réduit à $\frac{q}{(1-q)^2}$ pour $n = \infty$ (*voir* DESBOVES, *Questions d'Algèbre*, p. 229).

Par conséquent,

$$x = \frac{aq}{1-q}.$$