A. TOURRETTES

Problème de mathématiques élémentaires donné au concours d'agrégation en 1871

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 316-319

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__316_1>

PROBLÈME DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

DONNÉ AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1871;

SOLUTION DE M. A. TOURRETTES.

On donne la longueur de la bissectrice de l'angle A *d'un triangle* ABC, *et la somme des deux côtés* AB, AC *qui comprennent cet angle : on demande d'étudier la variation de la surface du triangle, ainsi que les variations de l'angle* A *et des côtés* AB, AC.

Soient x, y, z les côtés du triangle, α la longueur de la bissectrice de l'angle A, D le point de rencontre avec CB, s la somme $y + z$ des deux côtés de l'angle A.

D'après deux théorèmes connus, j'ai

$$yz = \alpha^2 + \mathrm{CD}.\mathrm{DB} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{CD}}{y} = \frac{\mathrm{DB}}{z} = \frac{x}{s};$$

d'où

$$\mathrm{CD} = \frac{xy}{s}, \quad \mathrm{DB} = \frac{xz}{s},$$

et par suite

$$yz = \frac{\alpha^2 s^2}{s^2 - x^2};$$

d'ailleurs

$$y + z = s.$$

Les valeurs de y et z sont les racines d'une équation du second degré, qui donne

$$\left.\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right\} = \frac{s\sqrt{s^2 - x^2} \pm s\sqrt{s^2 - x^2 - 4\alpha^2}}{2\sqrt{s^2 - x^2}}.$$

Pour la réalité des racines, il faut que

$$x^2 \leq s^2 - 4\alpha^2,$$

et cette condition entraîne $s^2 - x^2 > 0$.

Je cherche maintenant la valeur de $\cos \mathrm{A}$. On a immédiatement

$$\cos \mathrm{A} = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz},$$

et comme

$$y^2 + z^2 = s^2 - 2yz = \frac{s^2(s^2 - x^2) - 2\alpha^2 s^2}{s^2 - x^2},$$

il vient

$$\cos \mathrm{A} = \frac{(s^2 - x^2)^2 - 2\alpha^2 s^2}{2\alpha^2 s^2}.$$

Il faut donc que

$$(s^2 - x^2)^2 - 2\alpha^2 s^2 \leq 2\alpha^2 s^2 \quad \text{ou} \quad x^2 \geq s^2 - 2\alpha s.$$

On voit que x doit satisfaire aux deux inégalités

$$s^2 - 4\alpha^2 \geq x^2 \geq s^2 - 2\alpha s.$$

Pour trouver, en fonction de x, l'expression de la surface, je forme $\sin A$

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{s^2 - x^2}{2\alpha^2 s^2} \sqrt{4\alpha^2 s^2 - (s^2 - x^2)^2},$$

et comme

$$s = \frac{1}{2} yz \sin A,$$

il vient

$$s = \frac{1}{4} \sqrt{4\alpha^2 s^2 - (s^2 - x^2)^2}.$$

Ayant trouvé les limites de x^2, il est facile maintenant d'étudier les variations des côtés, de l'angle A et de la surface.

On peut mettre les valeurs de y et z sous la forme

$$\left.\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right\} = \frac{s}{2} \pm \frac{s}{2} \sqrt{1 - \frac{4\alpha^2}{s^2 - x^2}}.$$

Si $x^2 = s^2 - 2\alpha s$, ou sa valeur minima, le radical est maximum, par suite y est maximum, z minimum. On remarque que leur différence est maxima et qu'elle est égale à $\sqrt{s^2 - 2\alpha s}$. Les deux côtés sont l'un sur l'autre.

A mesure que x augmente, y diminue, z croît, et, pour $x^2 = s^2 - 4\alpha^2$, les deux côtés deviennent égaux à $\frac{s}{2}$.

Pour l'angle A, on trouve $\cos A = 1$ quand

$$x^2 = s^2 - 2\alpha s;$$

alors $A = 0$, ainsi que je l'ai remarqué ci-dessus. A mesure que x croît, la valeur de $\cos A$ diminue et par suite l'angle augmente. Pour $x^2 = s^2 - 4\alpha^2$,

$$\cos A = \frac{8\alpha^2 - s^2}{s^2}.$$

Enfin la surface, nulle pour $x^2 = s^2 - 2\alpha s$, va en augmentant avec x, puisque le carré $(s^2 - x^2)^2$ diminue. Elle est maxima pour $x^2 = s^2 - 4\alpha^2$.