Nouvelles annales de mathématiques

E. Dewulf

Démonstration d'un théorème fondamental de la théorie des figures homographiques dans l'espace

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 265-267

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__265_0>

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES FIGURES HOMOGRAPHIQUES DANS L'ESPACE;

PAR M. E. DEWULF,
Commandant du Génie.

On sait que, quand deux figures homographiques sont placées d'une manière quelconque dans l'espace, elles ont toujours quatre points correspondants communs; c'est-à-dire qu'il existe quatre points réels ou imaginaires, qui, étant considérés comme appartenant à la première figure, sont eux-mêmes leurs correspondants dans la seconde.

Ce théorème a été démontré théoriquement, dans les *Nouvelles Annales*, par M. de Jonquières (1re série, t. XVII, 1858, p. 52); mais je pense que la démonstration de ce géomètre peut être rendue plus élémentaire: le lecteur verra si je me trompe.

Désignons par F et F′ les deux figures homographiques; par a et a' deux droites correspondantes : il résulte immédiatement de la définition des figures homographiques qu'à un faisceau de plans passant par a il correspond un faisceau projectif de plans passant par a', et l'on sait que le lieu de l'intersection des plans correspondants des deux faisceaux projectifs est un hyperboloïde $[a, a']$.

Cela posé, soit M un point correspondant commun aux figures F et F′, ce point appartiendra évidemment aux surfaces du second degré $[a, a']$, quelles que soient les droites correspondantes a et a'.

Considérons trois droites a_1, a_2, a_3 de la figure F, situées dans un même plan α et se coupant en un même point A; à ces droites correspondront dans F′ trois autres droites a'_1, a'_2, a'_3 situées dans un plan α' correspondant à α, et se coupant en un point A′ qui correspond à A. Les points correspondants communs à F et à F′ se trouvent au nombre des points d'intersection des trois quadriques $[a_1, a'_1]$, $[a_2, a'_2]$, $[a_3, a'_3]$.

Or les quadriques $[a_1, a'_1]$, $[a_2, a'_2]$ ont deux génératrices communes, les droites AA′ et $\alpha\alpha'$ non situées dans un même plan, comme il est facile de le voir; elles se coupent donc suivant deux autres droites p et q non situées dans un même plan et formant avec les deux premières un quadrilatère gauche. Les droites AA′ et $\alpha\alpha'$ appartiennent aussi à la quadrique $[a_3, a'_3]$, qui coupera les côtés p et q du quadrilatère gauche en quatre points P_1, P_2 et Q_1, Q_2. L'intersection complète des trois quadriques se compose donc des droites AA′, $\alpha\alpha'$ et des points P_1, P_2, Q_1, Q_2.

Les plans a_1P_1, a'_1P_1 sont correspondants, puisque le point P_1 appartient à la quadrique $[a_1, a'_1]$; les plans a_2P_1, a'_2P_1 et a_3P_1, a'_3P_1 sont aussi correspondants pour la même raison. Donc le point P_1, considéré comme déterminé par l'intersection des trois plans a_1P_1, a_2P_1, a_3P_1 de F, a pour correspondant le même point P_1 de F′, donné par les trois plans $a'_1P_1, a'_2P_1, a'_3P_1$.

Le même raisonnement peut s'appliquer aux points P_2, Q_1 et Q_2; ce qui démontre que deux figures homographiques dans l'espace ont toujours quatre points correspondants communs; on sait d'ailleurs qu'elles ne peuvent en avoir un plus grand nombre sans se confondre.

Cette démonstration nous donne les conséquences suivantes : le quadrilatère gauche, intersection des deux quadriques $[a_1, a'_1]$, $[a_2, a'_2]$, a toujours deux côtés réels, les droites AA′, $\alpha\alpha'$; par conséquent, les deux autres côtés

p et q sont aussi réels; donc les quatre points correspondants communs aux deux figures homographiques, qui sont réels ou imaginaires suivant que la quadrique $[a_3, a'_3]$ coupe ou ne coupe pas les droites p et q, sont toujours situés sur deux droites réelles. Le théorème fondamental dont nous nous occupons peut donc être énoncé sous la forme suivante, plus complète que celle que l'on donne ordinairement :

Deux figures homographiques dans l'espace ont, en général, quatre points correspondants communs. Si les quatre points sont réels, ils forment un tétraèdre réel. Si deux points seulement sont réels, le tétraèdre a deux faces réelles qui passent chacune par un des points réels, et dont l'intersection est la ligne de jonction, toujours réelle, des deux points imaginaires. Si les quatre points sont imaginaires, les faces du tétraèdre le sont aussi, mais il y a toujours deux arêtes de ce tétraèdre qui sont réelles. Sur chacune de ces arêtes se trouvent deux points imaginaires conjugués et, par chacune d'elles, passent deux plans imaginaires conjugués. Le nombre des points réels est toujours égal à celui des plans réels.

Cet énoncé a été donné par M. Schoute, jeune géomètre hollandais, dans une intéressante étude sur l'homographie, mais il a établi le théorème par des considérations analytiques (*).

(*) *Homographie, en hare toepassing op de theorie der opperrlak. Een den tweeden graad.* Leyden, 1870, pages 18 et 19.