MORET-BLANC

Théorème proposé par M. Desboves

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 263-264

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__263_0>

THÉORÈME PROPOSÉ PAR M. DESBOVES

(voir 2e série, t. XVI, p. 229),

DÉMONSTRATION DE M. MORET-BLANC.

Si dans un quadrilatère ABCD, *dont on désigne les côtés* AB, BC, CD, DA *et les diagonales* AC, BD *par* a, b, c, d, e, f, *on a*

$$(1) \qquad \frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd},$$

on a aussi nécessairement l'une des deux relations suivantes :

$$(2) \qquad ef = ac + bd,$$

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2)(ef + ac + bd) \\ &\qquad - 2(ab + cd)(ad + bc) = 0, \end{aligned} \right.$$

et réciproquement l'une ou l'autre des équations (2) *et* (3) *entraîne nécessairement l'équation* (1).

Cherchons la relation qui doit exister entre les côtés et les diagonales d'un quadrilatère : il y en a nécessairement une, car le nombre des conditions nécessaires pour déterminer un polygone de n côtés étant $2n - 3$, c'est cinq pour le quadrilatère.

J'appelle α et β les angles BAC et CAD. Les triangles BAC, CAD et BAD donnent

$$b^2 = a^2 + e^2 - 2ae\cos\alpha,$$

$$c^2 = d^2 + e^2 - 2de\cos\beta,$$

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos A;$$

d'où

$$\cos\alpha = \frac{a^2 - b^2 + e^2}{2ae},$$

$$\cos\beta = \frac{d^2 - c^2 + e^2}{2de},$$

$$\cos A = \frac{a^2 + d^2 - f^2}{2ad}.$$

On a d'ailleurs

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,\\
\sin^2(\alpha+\beta) &= \sin^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta\\
&\quad + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta\\
&= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos A = 1 - \cos^2 A,
\end{aligned}$$

d'où

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2 A - 2\cos\alpha\cos\beta\cos A = 1,$$

et, en remplaçant $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos A$ par leurs valeurs et chassant les dénominateurs,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
& e^4 f^2 + e^2 f^4 + e^2 f^2 (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\\
&\quad + e^2 (a^2 b^2 + c^2 d^2 - a^2 c^2 - b^2 d^2)\\
&\quad + f^2 (b^2 c^2 + a^2 d^2 - a^2 c^2 - b^2 d^2)\\
&\quad + (a^4 c^2 + a^2 c^4 + b^4 d^2 + b^2 d^4)\\
&\quad - (a^2 b^2 c^2 + a^2 b^2 d^2 + a^2 c^2 d^2 + b^2 c^2 d^2) = 0,
\end{aligned}\right.$$

relation qui peut s'écrire

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
& (ac + bd - ef)\\
& [(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2)(ac + bd + ef)\\
&\qquad\qquad - 2(ab + cd)(ad + bc)]\\
&\qquad + [e(ab + cd) - f(ad + bc)]^2 = 0,
\end{aligned}\right.$$

ce qui démontre le théorème et sa réciproque.

Note du rédacteur. — Quand le quadrilatère ABCD est *convexe*, l'égalité (1) entraîne l'égalité (2), et inversement. (G.)