KOEHLER

# Solution d'une question proposée par M. Realis

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 17 (1878), p. 261-262
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__261_1>

## SOLUTION D'UNE QUESTION PROPOSÉE PAR M. REALIS

(voir 2e série, t. XIV, p. 298);

PAR M. KOEHLER.

*Dans toute équation du troisième degré dont les racines sont $a$, $b$, $c$, les différences $a - b$, $b - c$, $c - a$ s'expriment toujours en fonction rationnelle de l'une d'elles et des coefficients.*

Voici un calcul très-simple et très-élémentaire qui conduit à la proposition ci-dessus, pour l'équation complète au moyen d'une division algébrique. Soit

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

l'équation complète; soient $\delta$, $\delta'$, $\delta''$ les trois différences $a - b$, $b - c$, $c - a$; on a d'abord

$$\delta' + \delta'' = -\delta,$$

$$\begin{aligned}
\delta'\delta'' &= bc - c^2 - ab + ac \\
&= (bc + ca + ab) - (a^2 + b^2 + c^2) + (a - b)^2 \\
&= 3q - p^2 + \delta^2,
\end{aligned}$$

de sorte que $\delta'$ et $\delta''$ sont données par la formule

$$\Delta = -\frac{\delta}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4p^2 - 12q - 3\delta^2}.$$

L'équation au carré des différences est, comme on sait,

$$\Delta^6 - 2\Delta^4(p^2 - 3q) + \Delta^2(p^2 - 3q)^2 \\ + 4p^3r - p^2q^2 - 18pqr + 4q^3 + 27r^2 = 0,$$

ou abréviativement

$$\Delta^6 - 2M\Delta^4 + M^2\Delta^2 + N = 0.$$

En divisant le triple du premier membre de cette équation par la quantité soumise au radical dans l'expression ci-dessus de $\Delta$, c'est-à-dire par $-3\Delta^2 + 4M$, on trouve pour quotient $-\left(\Delta^2 - \frac{M}{3}\right)^2$ et pour reste $\frac{4M^3}{9} + 3N$. On a donc la relation

$$-(4M - 3\Delta^2)\left(\Delta^2 - \frac{M}{3}\right)^2 + \frac{4M^3}{9} + 3N = 0,$$

et, comme

$$\frac{4M^3}{9} + 4N = \frac{4}{9}p^6 + 9p^2q^2 + 81r^2 - 4p^4q + 12p^3r - 54pqr \\ = \left(\frac{2}{3}p^3 - 3pq + 9r\right)^2,$$

il vient, en définitive,

$$\Delta = -\frac{\delta}{2} \pm \frac{\frac{2}{3}p^3 - 3pq + 9r}{2\left(\delta^2 + q - \frac{p^2}{3}\right)}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

En faisant $p = 0$, on retrouve l'expression donnée par M. Réalis pour l'équation du troisième degré sans second terme.