H. LAURENT

Théorie élémentaire des fonctions elliptiques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 247-252

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__247_1>

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. H. LAURENT.

[SUITE (*).]

AUTRE MANIÈRE POUR ARRIVER AUX FORMULES D'ADDITION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

L'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} - \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0,$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVII, p. 119.

qui devient, par les substitutions $x = \sin\varphi$, $y = \sin\psi$,

$$(1)\qquad \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} - \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}} = 0,$$

admet pour intégrale

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} - \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \text{const.};$$

mais on peut lui trouver, comme l'ont prouvé Euler et Lagrange, une intégrale algébrique. Posons, à cet effet, avec Lagrange,

$$(2)\qquad \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}} = dt$$

ou

$$(3)\qquad \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}, \quad \frac{d\psi}{dt} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi},$$

puis

$$(4)\qquad \varphi + \psi = p, \quad \varphi - \psi = q;$$

on aura

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dp}{dt} + \dfrac{dq}{dt}\right) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \dfrac{p+q}{2}}, \\[2ex] \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dp}{dt} - \dfrac{dq}{dt}\right) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \dfrac{p-q}{2}}; \end{cases}$$

d'où

$$\frac{dp}{dt} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{p+q}{2}} + \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{p-q}{2}},$$

$$\frac{dq}{dt} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{p+q}{2}} - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{p-q}{2}},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dp}{dt}\frac{dq}{dt} = k^2\left[\sin^2 \frac{p-q}{2} - \sin^2 \frac{p+q}{2}\right],$$

ou enfin

$$\frac{dp}{dt}\frac{dq}{dt} = -k^2 \sin p \sin q. \tag{6}$$

Mais, en différentiant (3), on a

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{-k^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\frac{d\varphi}{dt} = -k^2 \sin\varphi \cos\varphi,$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -k^2 \sin\psi \cos\psi;$$

d'où l'on tire, par addition et soustraction,

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2p}{dt^2} &= -k^2 \sin p \cos q, \\ \frac{d^2q}{dt^2} &= -k^2 \sin q \cos p. \end{aligned} \right.$$

De (6) et (7), on tire

$$\frac{d^2p}{dp\,dq} = \frac{\cos q}{\sin q}, \quad \frac{d^2q}{dp\,dq} = \frac{\cos p}{\sin p},$$

ou

$$\frac{d^2p}{dp} = \frac{\cos q\,dq}{\sin q}, \quad \frac{d^2q}{dq} = \frac{\cos p\,dp}{\sin p},$$

ou

$$\frac{dp}{dt} = \alpha \sin q, \quad \frac{dq}{dt} = \alpha' \sin p,$$

α et α' désignant deux constantes qui doivent rentrer l'une dans l'autre. En remplaçant p et q par leurs valeurs dans ces formules, on a

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} + \sqrt{1-k^2\sin^2\psi} &= \alpha \sin(\varphi - \psi), \\ \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} - \sqrt{1-k^2\sin^2\psi} &= \alpha' \sin(\varphi + \psi). \end{aligned} \right.$$

Ce sont là deux intégrales de la formule (1); mais, en éliminant dt entre les deux formules précédentes, on obtient une nouvelle intégrale. En effet, on a

$$\frac{dp}{\alpha \sin q} = \frac{dq}{\alpha' \sin p} \quad \text{ou} \quad \alpha' \sin p \, dp = \alpha \sin q \, dq,$$

et, en intégrant,

$$\alpha \cos p = \alpha' \cos q + \alpha'',$$

α'' étant une nouvelle constante, et l'on a

$$(9) \qquad \alpha \cos(\varphi + \psi) = \alpha' \cos(\varphi - \psi) + \alpha''.$$

Or, on peut mettre l'intégrale de la formule (1) sous la forme

$$(10) \quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} - \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}} = \int_0^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\mu}},$$

μ désignant une constante à laquelle se réduit φ pour $\psi = 0$. Si, dans les formules (8) et (9), on fait $\psi = 0$, on a

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2\mu} + 1 = \alpha \sin\mu,$$

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2\mu} - 1 = \alpha' \sin\mu,$$

$$\alpha \cos\mu = \alpha' \cos\mu + \alpha''.$$

On en tire

$$\alpha = \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\mu} + 1}{\sin\mu}, \qquad \alpha' = \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\mu} - 1}{\sin\mu},$$

$$\alpha'' = \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\mu} + 1}{\sin\mu} \cos\mu - \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\mu} - 1}{\sin\mu} \cos\mu,$$

ou

$$\alpha'' = \frac{2\cos\mu}{\sin\mu}.$$

En portant dans la formule (9) ces valeurs de α, α', α'', on a

$$\frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\mu} + 1}{\sin\mu} \cos(\varphi + \psi)$$

$$= \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\mu} - 1}{\sin\mu} \cos(\varphi - \psi) + \frac{2\cos\mu}{\sin\mu},$$

et, en effectuant,

$$(11)\qquad \cos\varphi\cos\psi - \sqrt{1 - k^2\sin^2\mu}\,\sin\varphi\sin\psi = \cos\mu.$$

Cette formule est une des intégrales les plus célèbres de l'équation (1); les formules (8) en fournissent deux autres :

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} + \sqrt{1 - k^2\sin^2\psi} \\ &\qquad = \frac{\sqrt{1 - k^2\sin^2\mu} + 1}{\sin\mu}\sin(\varphi - \psi), \\ &\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} - \sqrt{1 - k^2\sin^2\psi} \\ &\qquad = \frac{\sqrt{1 - k^2\sin^2\mu} - 1}{\sin\mu}\sin(\varphi + \psi), \end{aligned}\right.$$

identiques au fond à la formule (11).

Maintenant, si l'on fait

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = a, \qquad \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} = b,$$

la formule (1) donnera

$$\int_0^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\mu}} = a - b;$$

donc

$$\varphi = \operatorname{am} a, \quad \psi = \operatorname{am} b, \quad \mu = \operatorname{am}(a - b).$$

Les formules (11) et (12) donneront alors

$$(13)\qquad \begin{aligned} &\operatorname{cn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn}(a - b) - \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b = \operatorname{cn}(a - b), \\ &\operatorname{dn} a - \operatorname{dn} b = \frac{\operatorname{dn}(a - b) + 1}{\operatorname{sn}(a - b)}(\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b - \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a), \\ &\operatorname{dn} a + \operatorname{dn} b = \frac{\operatorname{dn}(a - b) - 1}{\operatorname{sn}(a - b)}(\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b + \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a). \end{aligned}$$

Si nous posons, un instant, $\operatorname{dn}(a - b) = y$, $\operatorname{sn}(a - b) = x$, nous aurons, au lieu de ces dernières formules,

$$x(\operatorname{dn} a - \operatorname{dn} b) = (y+1)(\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b - \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a),$$

$$x(\operatorname{dn} a + \operatorname{dn} b) = (y-1)(\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b + \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a),$$

ou

$$x \operatorname{dn} a - y \operatorname{sn} a \operatorname{cn} b = - \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a,$$

$$x \operatorname{dn} b - y \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a = - \operatorname{sn} a \operatorname{cn} b.$$

On en tire

$$\operatorname{sn}(a-b) = \frac{\operatorname{sn}^2 a \operatorname{cn}^2 b - \operatorname{sn}^2 b \operatorname{cn}^2 a}{\operatorname{dn} b \operatorname{cn} b \operatorname{sn} a - \operatorname{dn} a \operatorname{cn} a \operatorname{sn} b},$$

$$\operatorname{dn}(a+b) = \frac{\operatorname{sn} b \operatorname{dn} b \operatorname{cn} a - \operatorname{sn} a \operatorname{dn} a \operatorname{cn} b}{\operatorname{dn} b \operatorname{cn} b \operatorname{sn} a - \operatorname{dn} a \operatorname{cn} a \operatorname{sn} b}.$$

Si l'on multiplie haut et bas ces deux formules par l'expression conjuguée de leur dénominateur, on a, en observant que $\operatorname{sn}^2 a \operatorname{cn}^2 b - \operatorname{sn}^2 b \operatorname{cn}^2 a$ est égal à $\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 b$,

$$(14) \quad \operatorname{sn}(a-b) = \frac{\operatorname{dn} b \operatorname{cn} b \operatorname{sn} a - \operatorname{dn} a \operatorname{cn} a \operatorname{sn} b}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b},$$

$$(15) \quad \operatorname{dn}(a-b) = \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b + \operatorname{dn} a \operatorname{dn} b}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}.$$

C. Q. F. D.