Questions

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 237-240

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__237_1>

QUESTIONS.

1255. D'un point M on mène des parallèles aux côtés d'un triangle ABC, qui rencontrent respectivement les deux autres côtés en des points a, α; $b, 6$; c, γ : démontrer que la somme

$$\mathrm{M}a.\,\mathrm{M}\alpha + \mathrm{M}b.\,\mathrm{M}6 + \mathrm{M}c\,\mathrm{M}\gamma$$

est égale à la puissance du point M par rapport au cercle circonscrit au triangle.

(H. Schröter.)

1256. La lettre l désignant un logarithme népérien, démontrer les inégalités

$$\frac{ln.l(n+1)}{2} > \frac{l2}{2} + \frac{l3}{3} + \ldots + \frac{ln}{n} > \frac{ln.l(n+1)}{2} - \frac{1}{12};$$

$$\frac{39}{31} - \frac{l(n+1)}{n} > \frac{l2}{2} + \frac{l3}{2.3} + \ldots + \frac{ln}{(n-1)n} > \frac{5}{4} - \frac{l(n+1)+1}{n}.$$

(C. Moreau.)

1257. Étant donné dans un plan un pentagone convexe quelconque ABCDE, chaque système de trois côtés consécutifs de ce pentagone donne un triangle.

Démontrer que les cinq cercles circonscrits à ces triangles déterminent par leurs intersections cinq points $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, situés sur une même circonférence.

(C. Moreau.)

1258. Soient ABC un triangle;

D, E, F les pieds des hauteurs menées des sommets A, B, C:

O le point d'intersection de la ligne EF avec une parallèle au côté BC menée par le sommet A;

a le milieu de BC;

G et H les points d'intersection de AO et d'un cercle décrit du point O comme centre avec Oa pour rayon.

On demande de démontrer :

1° Que les droites aG et aH sont, respectivement, les bissectrices des angles OaB et OaC;

2° Que, si la hauteur AD coupe le cercle au point K, on a $AK = Ba$. (Genty.)

1259. Si l'on développe l'expression $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^n$ suivant les puissances de α : 1° le développement aura toujours un nombre impair de termes; 2° les coefficients de la lettre ordonnatrice des termes équidistants de celui du milieu sont identiquement égaux; 3° si l'on égale à zéro ces coefficients qui sont des polynômes entiers et rationnels en x, ils ont toutes leurs racines imaginaires lorsqu'ils sont de degré pair, et ils renferment, en outre, une racine nulle lorsqu'ils sont de degré impair.

(Escary.)

1260. D'un point O pris sur une circonférence dont un diamètre est OE, on décrit une circonférence qui rencontre la première en des points A, B ; puis on joint un point quelconque C de la deuxième circonférence aux points A, B, E, par des droites qui coupent la première en des points F, D, G.

1° Les droites EF, ED sont respectivement parallèles à CB, CA.

2° La droite CE fait avec les côtés du triangle CAB les mêmes angles que la médiane partant du sommet C.

3° La droite CG est moyenne géométrique entre GA et GB.

(A. Cambier.)

1261. On prend un point A sur un diamètre fixe d'une circonférence donnée ; soit ABC le triangle isoscèle d'aire maximum, tel que B, C soient des points de la circonférence donnée et que BC soit perpendiculaire sur le diamètre passant par A. Trouver l'enveloppe de la droite AC quand A se meut sur le diamètre fixe.

(Lemoine.)

1262. Un point F est donné par ses coordonnées α, β, relativement à deux axes OX, OY, comprenant entre eux un angle θ : on demande de trouver l'équation de l'hyperbole qui passe par l'origine O, qui a le point F pour un de ses foyers, et dont les asymptotes sont parallèles aux axes OX et OY.

Quatre hyperboles répondent à la question. L'équation de chacune d'elles étant de la forme $xy - px - qy = 0$, il s'agit de trouver les quatre couples de valeurs de p et q, exprimées en fonctions des données α, β et θ.

(A. Boilleau.)

1263. 1° Si par deux points M, N, pris sur la circonférence circonscrite à un triangle, on mène des droites faisant avec les côtés du triangle des angles α égaux et de même orientation, les deux transversales qui joignent respectivement les trois sommets d'angles issus de M, et les trois sommets d'angles issus de N, se coupent en un point P sous un angle constant.

2° Déterminer le lieu du point P, quand on fait varier l'angle α. (P. TERRIER.)

1264. On donne une droite dont le coefficient d'inclinaison est tangα (axes rectangulaires). Indiquer une construction graphique qui donne directement $\tang^3\alpha$. Application à la construction graphique d'une tangente à la cissoïde et à la strophoïde, parallèlement à une direction donnée.

(H. BROCARD.)

1265. Le centre d'un cercle O de rayon constant se déplace dans son plan sur la circonférence d'un cercle fixe O'. Trouver l'enveloppe des polaires d'un point fixe P, par rapport au cercle O.

(LAISANT.)

1266. Si, par le pôle de l'orthogénide

$$\rho^{-\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{3}} \sin\left(-\frac{1}{3}\omega\right),$$

on mène une droite quelconque, les tangentes aux points d'intersection de cette droite avec l'orthogénide forment un triangle équilatéral (*). Trouver le lieu du centre de ce triangle et l'enveloppe du cercle circonscrit, lorsque la droite oscille autour du pôle.

(E. LUCAS.)

(*) *Voir* 2e série, t. V, p. 30, et t. XV, p. 101.