A. PELLISSIER

Seconde solution de la question 1232

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 225-227

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__225_1>

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 1232

(voir p. 130);

PAR M. A. PELLISSIER.

En un point M *d'une conique, on construit la parabole osculatrice, et l'on prend le symétrique* P *du foyer* F *de cette parabole, par rapport à la tangente en* M ; *démontrer que le point* M *et son symétrique* N *par rapport à* P *sont réciproques par rapport au cercle, lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique.*

(LAGUERRE.)

La parabole osculatrice d'une ellipse au point M a même axe de déviation que cette dernière en ce point; elle lui est tangente, et elle a même rayon de courbure. On en conclut immédiatement que OM est un diamètre de la parabole osculatrice. Le foyer F de cette courbe se trouve donc sur la ligne MF, symétrique de MO, par rapport à la tangente MT.

D'autre part, le rayon de courbure de l'ellipse en M est

$$\frac{b'^3}{ab} \text{ ou } \frac{b'^2}{a' \sin\theta},$$

en appelant a' le demi-diamètre OM, b' son conjugué, et θ l'angle de ces deux diamètres.

Le rayon de courbure de la parabole, au même point, est $\frac{P'}{2\sin\theta}$, où P′ est le paramètre du diamètre OM.

On a donc, en égalant ces deux rayons de courbure,

$$\frac{b'^2}{a' \sin\theta} = \frac{P'}{2\sin\theta},$$

ou, en remarquant que $P' = 4.\mathrm{FM}$,

$$2.\mathrm{FM} = \mathrm{MN} = \frac{b'^2}{a'};$$

par suite

$$\mathrm{ON} = \mathrm{OM} + \mathrm{MN} = a' + \frac{b'^2}{a'}$$

et

$$\mathrm{OM} \times \mathrm{ON} = a'\left(a' + \frac{b'^2}{a'}\right) = a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2.$$

La dernière égalité montre bien que les points M, N sont réciproques par rapport au cercle $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Note du rédacteur. — Dans le *Traité des sections coniques* de M. Salmon, il est démontré (p. 206, 3e édit., 1855) qu'en désignant par $x^2 + Bxy + Cy^2 + Ey = 0$, l'équation d'une conique, rapportee à une tangente et à la normale au point de contact, la parabole osculatrice en ce point a pour équation

$$x^2 + Bxy + \frac{B^2}{4}y^2 + Ey = 0;$$

il en résulte évidemment qu'au point de contact les deux courbes ont le même diamètre.

Les expressions $\frac{b'^2}{a' \sin\theta}$, $\frac{P'}{2 \sin\theta}$ des rayons de courbure se trouvent aussi dans le même ouvrage (p. 207 et 208).

L'égalité $OM \times ON = a^2 + b^2$ indique un moyen très-simple de déterminer la parabole osculatrice en un point M d'une ellipse donnée; car cette égalité donne immédiatement le point N, et en prenant le symétrique F du milieu P de MN, par rapport à la tangente en M, on a le foyer de la parabole. La directrice de cette courbe s'obtient en menant au point P une perpendiculaire à la direction du diamètre OM. (G.)