

A. PELLISSIER

Seconde solution de la question 1232

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 17
(1878), p. 225-227

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__225_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 1252

(voir p. 150);

PAR M. A. PELLISSIER.

En un point M d'une conique, on construit la parabole osculatrice, et l'on prend le symétrique P du foyer F

Ann. de Mathémat., 2^e série, t. XVII. (Mai 1878.)

de cette parabole, par rapport à la tangente en M ; démontrer que le point M et son symétrique N par rapport à P sont réciproques par rapport au cercle, lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique.

(LAGUERRE.)

La parabole osculatrice d'une ellipse au point M a même axe de déviation que cette dernière en ce point ; elle lui est tangente, et elle a même rayon de courbure. On en conclut immédiatement que OM est un diamètre de la parabole osculatrice. Le foyer F de cette courbe se trouve donc sur la ligne MF, symétrique de MO, par rapport à la tangente MT.

D'autre part, le rayon de courbure de l'ellipse en M est

$$\frac{b'^3}{ab} \text{ ou } \frac{b'^2}{a' \sin \theta},$$

en appelant a' le demi-diamètre OM, b' son conjugué, et θ l'angle de ces deux diamètres.

Le rayon de courbure de la parabole, au même point, est $\frac{P'}{2 \sin \theta}$, où P' est le paramètre du diamètre OM.

On a donc, en égalant ces deux rayons de courbure,

$$\frac{b'^2}{a' \sin \theta} = \frac{P'}{2 \sin \theta},$$

ou, en remarquant que $P' = 4 \cdot FM$,

$$2 \cdot FM = MN = \frac{b'^2}{a'};$$

par suite

$$ON = OM + MN = a' + \frac{b'^2}{a'}$$

et

$$OM \times ON = a' \left(a' + \frac{b'^2}{a'} \right) = a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2.$$

La dernière égalité montre bien que les points M, N sont réciproques par rapport au cercle $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Note du rédacteur. — Dans le *Traité des sections coniques* de M. Salmon, il est démontré (p. 206, 3^e édit., 1855) qu'en désignant par $x^2 + Bxy + Cy^2 + Ey = 0$, l'équation d'une conique, rapportée à une tangente et à la normale au point de contact, la parabole osculatrice en ce point a pour équation

$$x^2 + Bxy + \frac{B^2}{4}y^2 + Ey = 0;$$

il en résulte évidemment qu'au point de contact les deux courbes ont le même diamètre.

Les expressions $\frac{b^2}{a' \sin \theta}$, $\frac{P'}{2 \sin \theta}$ des rayons de courbure se trouvent aussi dans le même ouvrage (p. 207 et 208).

L'égalité $OM \times ON = a^2 + b^2$ indique un moyen très-simple de déterminer la parabole osculatrice en un point M d'une ellipse donnée; car cette égalité donne immédiatement le point N, et en prenant le symétrique F du milieu P de MN, par rapport à la tangente en M, on a le foyer de la parabole. La directrice de cette courbe s'obtient en menant au point P une perpendiculaire à la direction du diamètre OM. (G.)