NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GENTY

Exercices sur le tétraèdre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 223-225

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__223_1>

EXERCICES SUR LE TÉTRAÈDRE;

Proposés par M. GENTY.

1. Si, dans un tétraèdre, les arêtes opposées sont égales deux à deux, on peut dire que ce tétraèdre est *isoscèle*. Les quatre faces d'un tétraèdre isoscèle sont évidemment des triangles égaux.

Soient a, b, c les côtés de l'un de ces triangles, A, B et C les angles. Soient de plus α, β, γ les médianes qui joignent les milieux des côtés a, b et c respectivement, aux milieux des côtés opposés du tétraèdre.

2. On a

$$\alpha^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2},$$

$$\beta^2 = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2},$$

$$\gamma^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2};$$

$$a^2 = \beta^2 + \gamma^2,$$
$$b^2 = \gamma^2 + \alpha^2,$$
$$c^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

3. Les médianes sont en même temps les plus courtes distances des arêtes opposées du tétraèdre, et elles forment un trièdre trirectangle.

4. Les angles dièdres opposés du tétraèdre sont égaux deux à deux; et, si φ, ψ, θ sont les angles dièdres qui ont pour arêtes les côtés a, b et c de la face ABC, on a

$$\frac{\sin\varphi}{a} = \frac{\sin\psi}{b} = \frac{\sin\theta}{c},$$

et par suite

$$\frac{\sin\varphi}{\sin A} = \frac{\sin\psi}{\sin B} = \frac{\sin\theta}{\sin C}.$$

5. Si V est le volume du tétraèdre, on a

$$V = \frac{\alpha\beta\gamma}{3}.$$

On a aussi

$$V = \frac{abc}{3}\sqrt{\cos A \cos B \cos C}.$$

6. Si S est l'aire de l'une des faces du tétraèdre, on a

$$S = \frac{\sqrt{\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2}}{2}.$$

On a donc aussi

$$\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2$$
$$= \frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4}.$$

7. Le point d'intersection des médianes, qui est le centre de gravité du tétraèdre, est en même temps le centre des sphères inscrite et circonscrite.

Si R et r sont les rayons de ces deux sphères, on a

$$R^2 = \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{4(\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2)}$$
$$= \frac{a^2b^2c^2 \cos A \cos B \cos C}{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)},$$
$$r^2 = \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{4} = \frac{a^2+b^2+c^2}{8}.$$

8. Tous les angles plans d'un tétraèdre isoscèle sont nécessairement des angles aigus.

9. Si l'on désigne par P la puissance de l'un des sommets du tétraèdre par rapport à la sphère inscrite, on a

$$P = \frac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$
$$= \frac{(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2)(\alpha^2+\beta^2)}{4(\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2)}.$$