NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 219-223

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__219_0>

CORRESPONDANCE.

1. *Lettre de M. de Jonquières à M. Gerono.*

MONSIEUR ET CHER PROFESSEUR,

Vous avez bien voulu m'inviter à rechercher s'il existe des nombres entiers, autres que 5, dont chacun jouisse, comme celui-ci, de la double propriété d'être la somme des carrés de deux nombres consécutifs ($5 = 1^2 + 2^2$) et d'avoir pour carré la somme des carrés de deux nombres consécutifs ($5^2 = 3^2 + 4^2$), ajoutant que vous étiez porté à croire qu'il n'y en a aucun.

La chose se prouve sans difficulté pour tous les nombres premiers autres que 5 et pour tous les nombres composés de deux facteurs simples, comme vous le verrez par la démonstration que j'ai l'honneur de vous communiquer. Mais il reste à chercher si le théorème est vrai pour tout nombre composé de plus de deux facteurs simples.

En me livrant à cette étude, nouvelle pour moi, j'ai rencontré la propriété suivante des réduites d'une certaine classe de fractions continues, qui peut-être n'a point encore été remarquée. J'observerai pourtant que, dans le très-intéressant et important Mémoire de M. Lucas, intitulé: *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise* et que vous avez bien voulu me communiquer hier, je trouve (p. 2) une relation semblable (au moins quant à l'une des deux parties de ma proposition) entre les termes de même rang de la *série de Lamé,* qui ne sont autres que ceux des réduites de la fraction continue suivant laquelle se développe $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Bien qu'il n'y ait pas une analogie complète entre ce cas particulier et le cas général que j'ai examiné avant d'avoir eu connaissance de l'ouvrage de M. Lucas, j'ai cru ne pas devoir passer sous silence le rapprochement auquel le passage cité donne lieu.

Cela dit, voici la proposition dont il s'agit :

THÉORÈME. — *Si l'on représente par* $\frac{P_n}{Q_n}$ *la réduite de rang* n $\left(\textit{la première étant, selon l'usage, } \frac{1}{0}\right)$ *de la fraction continue suivant laquelle se développe la racine carrée de* $a^2 + 1$ *(*a *étant un nombre entier), on a les deux relations*

$$P_{2n} = P_n \cdot Q_n + P_{n+1} Q_{n+1},$$
$$Q_{2n} = \overline{Q_n}^2 + \overline{Q_{2n+1}}^2.$$

On en conclut, par exemple, que 5 est le seul nombre premier (car 1 ne doit pas être compté) qui soit et dont le carré soit aussi la somme des carrés de deux nombres consécutifs. Je le démontre aussi par une autre voie qui a l'avantage de donner à cette proposition une plus grande extension.

L'étude de la fraction continue dont il est question ci-dessus donne encore lieu aux remarques suivantes, qui m'ont été suggérées par la lecture du Mémoire de M. Lucas. Les notations demeurant les mêmes, il est aisé de démontrer qu'on a toujours

$$P_n P_{n+1} - P_{n-1} P_{n+2} = (-1)^{n-1}\, 2a\, (a^2 + 1),$$
$$P_n^2 - P_{n-1} P_{n+1} = (-1)^{n-1} (a^2 + 1),$$
$$Q_n Q_{n+1} - Q_{n-1} Q_{n+2} = (-1)^n\, 2a,$$
$$Q_n^2 - Q_{n-1} Q_{n+1} = (-1)^n,$$
$$Q_n Q_{n+1} - Q_{n-1} Q_{n-2} = 2a\, Q_{2(n-1)}.$$

E. DE JONQUIÈRES.

Paris, 29 avril 1878.

2. *Extrait d'une lettre de M. S. Realis.* — « ... Permettez-moi d'observer que la solution donnée (p. 132) de la question 1237 n'est pas satisfaisante. Cette solution, en effet, ne convient qu'au cas très-particulier où $\alpha, 6, \gamma, \delta$ sont tous des nombres pairs; dans les autres cas, l'expression proposée se trouve décomposée, par la formule de M. *Cauret,* en deux facteurs, dont l'un est la somme de quatre carrés entiers, tandis que l'autre est la somme de quatre carrés fractionnaires. La formule mentionnée ne répond donc pas à l'énoncé de la question. »

Dans l'égalité

$$\begin{aligned}P^2 + Q^2 + R^2 + S^2 &= A(A + 2B + 1)\\ &= (\alpha^2 + 6^2 + \gamma^2 + \delta^2)(\alpha^2 + 6^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \alpha + 6 + \gamma + \delta + 1)\\ &= \frac{1}{4}(\alpha^2 + 6^2 + \gamma^2 + \delta^2)[(2\alpha + 1)^2 + (26 + 1)^2\\ &\qquad + (2\gamma + 1)^2 + (2\delta + 1)^2]\ (^*),\end{aligned}$$

établie (p. 133), le facteur

$$\frac{1}{4}[(2\alpha + 1)^2 + (26 + 1)^2 + (2\gamma + 1)^2 + (2\delta + 1)^2]$$

est effectivement la somme des carrés des quatre nombres fractionnaires $\alpha + \frac{1}{2}$, $6 + \frac{1}{2}$, $\gamma + \frac{1}{2}$, $\delta + \frac{1}{2}$.

Mais cette somme peut toujours être transformée en la somme des carrés de quatre nombres entiers. Les calculs de cette transformation sont complétement indiqués dans une solution de la question 1237, que M. Realis nous a communiquée.

Deux cas sont à distinguer suivant que $\alpha + 6 + \gamma + \delta$ est un nombre pair, ou impair.

(*) Nous retablissons ici le terme $(2\delta + 1)^2$ qui a été omis dans l'impression.

Dans le premier, B ou $\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2}$ est un nombre entier, et il en est de même de

$$B + 1,\; B - (\gamma + \delta),\; B - (\beta + \delta),\; B - (\alpha + \delta).$$

Or, en ayant égard aux relations

$$2B = \alpha + \beta + \gamma + \delta \quad \text{et} \quad A = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2,$$

on a

$$\begin{aligned} A + 2B + 1 = (B + 1)^2 &+ [B - (\gamma + \delta)]^2 \\ &+ [B - (\beta + \delta)]^2 + [B - (\alpha + \delta)]^2; \end{aligned}$$

donc $A + 2B + 1$ ou

$$\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\beta + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\delta + \frac{1}{2}\right)^2$$

est égal à la somme des carrés de quatre nombres entiers.

Lorsque $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ est impair, $B + \frac{1}{2}$ est un nombre entier, et il en est de même de $B + \frac{1}{2} - \alpha$, $B + \frac{1}{2} - \beta$, $B + \frac{1}{2} - \gamma$, $B + \frac{1}{2} - \delta$, et l'on a encore

$$\begin{aligned} A + 2B + 1 = \left(B + \frac{1}{2} - \alpha\right)^2 &+ \left(B + \frac{1}{2} - \beta\right)^2 \\ &+ \left(B + \frac{1}{2} - \gamma\right)^2 + \left(B + \frac{1}{2} - \delta\right)^2; \end{aligned}$$

donc, dans les deux cas, $A + 2B + 1$ ou

$$\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\beta + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\delta + \frac{1}{2}\right)^2$$

est égal à la somme de quatre carrés entiers.

3. Une solution de la question 1237 nous a été adressée

par M. Pisani, trop tardivement pour qu'il ait été possible d'en faire mention dans le numéro de mars dernier.

En nommant $2p$ le nombre pair

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \alpha + \beta + \gamma + \delta,$$

un calcul assez simple a conduit à l'égalité

$$P^2 + Q^2 + R^2 + S^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)(2p + 1).$$

Le nombre impair $2p + 1$ est, comme le remarque M. Pisani, égal à la somme de quatre carrés entiers dont deux sont égaux; reste à exprimer ces carrés entiers en fonction de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$: c'est ce qui manque à la solution de M. Pisani. On y prouve seulement que $2p + 1$ est la somme des carrés des quatre nombres fractionnaires $\alpha + \frac{1}{2}$, $\beta + \frac{1}{2}$, $\gamma + \frac{1}{2}$, $\delta + \frac{1}{2}$, ce qui résulte aussi de la formule de M. Cauret. (G.)