Concours général de 1877

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 213-218

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__213_1>

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1877

(voir 2e série, t. XVII, p. 106);

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES. PHILOSOPHIE.
RHÉTORIQUE. SECONDE. TROISIÈME.

PAR UN ABONNÉ.

I. — *Mathématiques élémentaires.*

Étant donnés deux plans P *et* P′ *et un point* A *hors de ces plans, on considère toutes les sphères qui passent par le point* A, *et qui sont tangentes aux deux plans donnés :*

1° *Trouver le lieu de la droite qui joint le point* A *au centre de la sphère variable ;*

2° *Trouver le lieu du point où cette sphère touche l'un des plans.*

Dans le cas le plus général, les plans P, P′ se coupent, et le point A est situé dans l'intérieur de l'un des angles dièdres formés par P et P′. Le centre C de la sphère variable appartient au plan bissecteur de cet angle dièdre. Les projections c, c' de C sur les plans P, P′ sont les points de contact de la sphère et de ces plans.

Soient Aa la perpendiculaire menée du point A sur le plan bissecteur ; A′ le symétrique de A, par rapport à ce plan ; p, p' les points où la perpendiculaire Aa prolongée coupe les plans P, P′. Il est clair que A′ est un point de la sphère dont C est le centre, et qui passe en A, et que la droite pc est tangente à la sphère en c. On a donc $pc = \sqrt{pA' \times pA}$; il s'ensuit que le lieu du point c où la sphère variable touche le plan P est une circonférence qui a pour centre le point p, et pour rayon la moyenne géométrique entre pA′ et pA. De même, le lieu du point c' est une circonférence dont p' est le centre et qui a pour rayon $\sqrt{p'A' \times p'A}$. Ces deux circonférences sont égales et symétriques par rapport au plan bissecteur.

La ligne plane décrite par le centre C de la sphère variable, se projetant suivant une circonférence sur le plan P, est, comme on sait, une ellipse. Le point a est le centre de cette ellipse ; ses axes se déterminent au moyen d'une construction bien connue.

Par conséquent, le lieu de la droite qui joint le point A au centre de la sphère variable est un cône dont la trace sur le plan bissecteur est une ellipse déterminée, et qui a pour sommet le point donné A.

Lorsque les plans P, P′ sont parallèles, le centre C de la sphère appartient à un plan parallèle à P et P′ et équidistant de P et P′. La ligne décrite par C se projetant en vraie grandeur sur le plan P est une circonférence, et le lieu de la droite AC est un cône de révolution.

Note. — Même solution de MM. Moret-Blanc et Gambey.

II. — *Philosophie.*

Étant donnée une sphère de rayon R, *trouver :*

1° Le lieu du sommet d'un trièdre dont les trois arêtes sont tangentes à cette sphère, et dont les trois faces sont égales chacune à 60 degrés ;

2° Le lieu du sommet d'un angle trièdre dont les plans des trois faces sont tangentes à la même sphère, et dont les trois angles dièdres sont égaux chacun à 120 degrés.

1° Soient SA, SB, SC les trois arêtes tangentes aux points A, B, C à la sphère dont le centre est O, et le rayon R. Il résulte des données de la question que les six arêtes du tétraèdre SABC sont égales entre elles. La droite OS est perpendiculaire au plan ABC, en un point M, centre du cercle circonscrit au triangle équilatéral ABC. On a

$$\mathrm{CM} = \frac{\mathrm{CB}}{\sqrt{3}} = \frac{\mathrm{SC}}{\sqrt{3}}$$

et

$$\mathrm{OC} \times \mathrm{SC} = \mathrm{OS} \times \mathrm{CM}$$

ou

$$\mathrm{R.SC} = \mathrm{OS}\,\frac{\mathrm{SC}}{\sqrt{3}};$$

donc

$$\mathrm{OS} = \mathrm{R}\sqrt{3}.$$

Le lieu du sommet S est donc une sphère concentrique à la sphère donnée, et dont le rayon est $\mathrm{R}\sqrt{3}$.

2° A, B, C désignant les points de contact, les trois faces du trièdre OABC sont égales chacune à 60 degrés.

Les six arêtes du tétraèdre OABC sont égales à R.

On a

$$\mathrm{CM} = \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{3}}$$

et

$$OM^2 = R^2 - \frac{R^2}{3} = \frac{2R^2}{3}; \quad OM = R\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

D'autre part, le triangle rectangle OCS donne

$$OC^2 = OM \times OS, \quad \text{ou} \quad R^2 = R\sqrt{\frac{2}{3}} \times OS,$$

d'où

$$OS = R\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Le lieu du sommet S est une sphère concentrique à la sphère donnée, et dont le rayon

$$OS = R\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Note. — Même solution de M. Moret-Blanc.

III. — *Rhétorique.*

Par un point A, *pris en dehors d'une circonférence donnée* O, *on mène à cette circonférence une tangente* AB, *terminée au point de contact* B, *et l'on demande quelle doit être la distance* AO *pour que, en faisant tourner la figure autour de cette droite, l'aire de la surface engendrée par* AB *soit la moitié de la surface engendrée par la circonférence* O.

Menons BH perpendiculaire sur AO, et posons $BH = h$, $OB = r$, $OA = x$. Les aires engendrées par AB et par la circonférence ont respectivement pour valeurs $\pi . OB . AH$, et $4\pi . OB^2$; d'où

$$\pi . OB . AH = 2\pi . OB^2, \quad AH = 2\,OB = 2r.$$

Le triangle rectangle ABO donne $AB^2 = AO \times AH$, ou

$$x^2 - r^2 = x \times 2r, \quad x^2 - 2rx - r^2 = 0;$$
$$x = r + r\sqrt{2} = r(1 + \sqrt{2}).$$

IV. — *Seconde.*

La perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle sur l'hypoténuse partage ce triangle en deux triangles partiels : démontrer que le carré du rayon du cercle inscrit dans le triangle total est égal à la somme des carrés des rayons des cercles inscrits dans les triangles partiels.

Cette proposition résulte immédiatement de ce que les rayons des cercles inscrits dans des triangles semblables sont proportionnels aux côtés homologues de ces triangles.

V. — *Troisième.*

Soit ABC *un triangle dans lequel l'angle* A *est droit, et l'angle* B *double de l'angle* C. *On construit en dehors du triangle* ABC : 1° *sur l'hypoténuse* BC *le carré* BCDE; 2° *sur le côté* AB, *le triangle équilatéral* ABF; 3° *sur le côté* AC, *le triangle équilatéral* ACG. *On joint le point* F *au point* G, *et au point* E, *extrémité du côté* BE *du carré* BCDE.

On suppose l'hypoténuse BC *égale à* a, *et l'on demande de calculer :* 1° *les côtés* AB, AC *du triangle* ABC; 2° *la distance du point* F *à la droite* BE, *et la distance du point* G *à la droite* AF; 3° *la surface du quadrilatère* EFGD.

1° Dans le triangle rectangle ABC, l'angle C $=$ 30 degrés, donc :

$$1^\circ\ AB = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a, \quad \text{et} \quad AC = \frac{1}{2}a\sqrt{3}.$$

2° Si l'on prolonge la droite EB jusqu'à sa rencontre avec FA en un point H, l'angle ABH supplément de ABE sera de 30 degrés. Par suite, l'angle BHF est droit : donc la distance FH du point F à la droite BE est égale à $\frac{a}{4}$. De même le prolongement AM de FA forme avec AC un angle de 30 degrés ; la droite FM est, par conséquent, perpendiculaire à GC, au point M, milieu de GC ; elle est parallèle à BC et à DE. Ainsi la distance GM du point G à la droite AF est égale à $\frac{1}{4} a \sqrt{3}$.

3° Le quadrilatère EFGD étant la somme des triangles FDG, FDE, on a

$$EFGD = \frac{1}{2} DG \times FM + \frac{1}{2} DE \times DM,$$

puisque FM est parallèle à DE.

Or,

$$DG = DC + CG = a + \frac{1}{2} a\sqrt{3} = \frac{1}{2} a(2 + \sqrt{3}),$$

$$FM = MH + HF = a + \frac{1}{4} a = \frac{5a}{4},$$

$$DE = BC = a,$$

$$DM = DC + CM = a + \frac{1}{4} a\sqrt{3} = \frac{1}{4} a(4 + \sqrt{3}).$$

Il en résulte

$$EFGD = \frac{5}{16} a^2(2 + \sqrt{3}) + \frac{1}{8} a^2(4 + \sqrt{3});$$

d'où

$$EFGD = \frac{1}{16} a^2(18 + 7\sqrt{3}).$$

On peut aussi exprimer la surface EFGD en fonction de l'hypoténuse a, en remarquant que EFGD est la somme du trapèze EFMD et du triangle rectangle FMG, dont il est facile d'évaluer les surfaces.