LAGUERRE

Sur la résolution des équations numériques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 20-25

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__20_1>

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES;

PAR M. LAGUERRE,

I.

1. Soit une équation algébrique de degré n et à

coefficients réels ou imaginaires; en prenant $\frac{x}{y}$ pour inconnue, elle peut s'écrire sous la forme suivante

$$f(x, y) = 0,$$

f désignant un polynôme homogène et du degré n par rapport aux quantités x et y; ou encore, en posant $z = \frac{x}{y}$,

$$F(z) = f(z, 1) = 0.$$

En prenant d'une façon arbitraire, dans un plan, deux droites rectangulaires pour axe des abscisses et pour axe des ordonnées, je conviendrai, suivant l'usage habituel, de représenter une quantité imaginaire $\alpha + \beta i$ par un point ayant α pour abscisse et β pour ordonnée.

Cela posé, $z = \frac{x}{y}$ étant une quantité imaginaire quelconque représentée par le point m du plan, j'appellerai *point dérivé du point m* le point μ représentant la quantité $\zeta = \frac{\xi}{\eta}$ déterminée par l'équation

$$\xi f'_x + \eta f'_y = 0.$$

On déduit de cette équation

$$\zeta = -\frac{f'_y}{f'_x},$$

ou, en vertu du théorème sur les fonctions homogènes,

$$\zeta = z - n\frac{F(z)}{F'(z)}.$$

Lorsque l'on considère z comme la valeur approchée d'une racine de l'équation $F(Z) = 0$, en désignant par z' la valeur que l'on en déduit pour cette racine, par la méthode de Newton on a

$$z' = z - \frac{F(z)}{F'(z)};$$

d'où cette conclusion : Si m est un point du plan représentant une valeur approchée d'une racine de l'équation $F(Z) = 0$, et si la valeur approchée de cette racine, que l'on en déduit par la méthode de Newton, est représentée par le point m', le point μ dérivé du point m s'obtient en portant dans la direction mm', et à partir du point m, une longueur égale à $n \times mm'$.

2. J'établirai d'abord la proposition suivante :

Théorème I. — *Étant donnée une équation algébrique de degré n, si l'on prend un point m arbitrairement dans le plan et si l'on désigne par μ le point dérivé du point m, tout cercle passant par les deux points m et μ, s'il ne passe pas par toutes les racines de l'équation, contient au moins une de ces racines ; et, dans ce cas, une au moins des racines est située à l'extérieur du cercle.*

Pour démontrer cette proposition, je remarquerai que, α, β, γ, δ désignant des quantités imaginaires quelconques, les différents points représentés par l'expression

$$Z = \frac{\alpha + \beta t}{\gamma + \delta t},$$

quand on donne à t toutes les valeurs *réelles* possibles, sont situés sur un même cercle, et que, pour deux valeurs imaginaires quelconques de t, les points représentant les valeurs correspondantes de z sont situés du même côté par rapport au contour du cercle, ou de côtés différents, suivant que, dans les valeurs de la variable t, les coefficients de i sont de même signe ou de signes contraires.

Cela posé, $z = \frac{x}{y}$ ayant une valeur quelconque et ζ étant déterminé par l'équation

$$\zeta = \frac{\xi}{\eta} = -\frac{f'_y}{f'_x},$$

l'expression

$$\mathrm{Z} = \frac{tx - \lambda f'_y}{ty - \lambda f'_x},$$

quand on y donne à t toutes les valeurs réelles, représente un cercle passant par le point m représentant z, puisque, pour $t = \infty$, on a $\mathrm{Z} = \frac{x}{y}$; ce cercle passe également par le point dérivé μ représentant ζ, puisque, pour $t = 0$, on a

$$\mathrm{Z} = -\frac{f'_y}{f'_x}.$$

On voit ainsi, à cause de l'indétermination de λ, que l'expression précédente représente, pour des valeurs réelles de t, les différents points d'un cercle quelconque passant par les deux points m et μ et, d'après ce que j'ai dit plus haut, pour démontrer la proposition énoncée, il suffira de prouver que l'équation

$$\mathrm{F}\left(\frac{tx - \lambda f'_y}{tx + \lambda f'_x}\right) = 0,$$

si elle admet des racines imaginaires, admet au moins une racine où le coefficient de i est positif et une racine où ce coefficient est négatif.

L'équation précédente peut s'écrire ainsi :

$$f(tx - \lambda f'_y,\ ty + \lambda f'_x) = 0,$$

ou, en développant suivant les puissances de t,

(1) $$\mathrm{A}t^n + \mathrm{B}t^{n-2} + \mathrm{C}t^{n-3} + \ldots = 0.$$

Le coefficient de t^{n-1} dans cette équation est égal à zéro; un calcul facile montre, en effet, qu'il est égal à

$$\lambda(f'_x f'_y - f'_x f'_y).$$

De là résulte que la somme des racines de l'équation (1) est nulle; en désignant donc par $a + bi$, $a' + b'i$, ... ces racines, on a

$$\Sigma(a + bi) = 0,$$

d'où

$$\Sigma b = 0;$$

et, par suite, si toutes les valeurs de b ne sont pas nulles, il y a au moins deux de ces valeurs qui sont de signes contraires, ce qui démontre la proposition énoncée.

3. Théorème II. — *Étant donnés un cercle quelconque qui renferme toutes les racines de l'équation $f(X, Y) = 0$ et un point $\zeta = \frac{\xi}{\eta}$, situé en dehors de ce cercle, tous les points $z = \frac{x}{y}$, définis par l'équation*

$$\xi f'_x + \eta f'_y = 0,$$

sont situés dans l'intérieur du cercle.

En effet, z désignant l'un quelconque des points ainsi définis, ζ est son point dérivé; si z n'était pas situé dans l'intérieur du cercle, par les deux points z et ζ qui lui sont tous deux extérieurs, on pourrait mener un cercle renfermant dans son intérieur le cercle donné et, par suite, toutes les racines, ce qui est contraire à la proposition précédente. Le théorème est donc démontré.

On démontrerait de même la proposition suivante :

Étant donnés un cercle quelconque à l'extérieur du-

quel sont situées toutes les racines de l'équation

$$f(X, Y) = 0,$$

et un point $\zeta = \frac{\xi}{\eta}$, *situé dans l'intérieur de ce cercle, tous les points* $z = \frac{x}{y}$, *définis par l'équation*

$$\xi f'_x + \eta f'_y = 0,$$

sont situés à l'extérieur de ce cercle.

4. Étant donnée une équation de degré n, $F(z) = 0$, et m étant le point représentatif d'une valeur z, approchée d'une racine de cette équation, désignons par m' le point représentatif de la valeur approchée de cette racine que donne la méthode de Newton. Le point μ dérivé de m s'obtient en portant, à partir de m dans la direction mm', une longueur égale à $n \times mm'$, et tout cercle passant par les points m et μ contient au moins une racine de l'équation.

En particulier, le cercle décrit sur $m\mu$ comme diamètre contiendra une racine et, si m est suffisamment voisin de la racine, m sera très-voisin de m' et par conséquent de μ; le cercle dont je viens de parler aura donc un rayon très-petit et contiendra la racine cherchée.

Dans tous les cas, on peut énoncer la proposition suivante :

Quelle que soit la quantité z, *il y a au moins une racine de l'équation* $F(z) = 0$ *dont la différence avec l'expression*

$$z - \frac{F(z)}{F'(z)}$$

a un module moindre que $(n - 1)$ *fois le module de* $\frac{F(z)}{F'(z)}$.

(*A suivre.*)