MORET-BLANC

Concours général de 1877

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 209-213

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__209_1>

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1877.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES,

PAR M. MORET-BLANC.

Rechercher les surfaces S *du second degré sur lesquelles existe une droite* D, *telle que l'hyperboloïde de révolution* H, *qui a pour axe une génératrice rectiligne quelconque* G *de la surface* S, *et du même système que* D, *et qui passe par la droite* D, *coupe orthogonalement la surface* S *en tous les points de cette droite.*

Si l'on considère tous les hyperboloïdes H, *qui se rapportent à une même surface* S *jouissant de la propriété énoncée :*

1° *Trouver le lieu des sommets* A *et celui des foyers*

(*) Cette valeur de x montre que le point C s'obtient en divisant le diamètre AB, en moyenne et extrême raison. Le plus grand des deux segments de cette division est AC.

F *des hyperboloïdes* H′ *conjugués des hyperboloïdes* H;

2° *Par l'un des foyers* F *de l'hyperboloïde* H′, *on mène un plan* P *parallèle à la perpendiculaire commune aux deux droites* G *et* D, *et faisant avec cette dernière un angle supplémentaire de celui que fait avec cette même droite l'axe* G *de l'hyperboloïde* H; *trouver le lieu de la droite qui joint le point où le plan* P *coupe la droite* D *à l'un des points où ce plan coupe la courbe d'intersection de la surface* S *et de l'hyperboloïde* H.

La normale à l'hyperboloïde H en un point de la droite D, perpendiculaire à cette droite, devant rencontrer l'axe de l'hyperboloïde, c'est-à-dire une génératrice quelconque G de la surface S, du même système que D, est une génératrice du second système. Cette condition, qui est nécessaire, est suffisante, car en tout point de la génératrice commune D, la normale à H étant contenue dans le plan tangent à S, les deux surfaces se couperont orthogonalement en tous les points de la droite D.

Il résulte de là que les surfaces S sont des paraboloïdes hyperboliques à plans directeurs rectangulaires.

Si l'on prend la droite D pour axe de z, les plans directeurs pour plans des xz et des xy, et la génératrice du second système perpendiculaire au premier plan directeur pour axe des y, l'équation des surfaces S, abstraction faite de leur position dans l'espace, sera

$$(S) \qquad\qquad yz = kx,$$

k étant une constante pour une même surface S, et variant d'une surface à l'autre.

Les équations des génératrices du premier système (celui de D) sont

$$(G)\qquad \left\{\begin{aligned} y &= \mu k, \\ z &= \frac{1}{\mu}x, \end{aligned}\right\} \text{ équations de l'axe.}$$

1° Le centre de l'hyperboloïde H est sur l'axe Oy à la distance μk de l'origine ou de la droite D ; l'équation de cet hyperboloïde, rapporté à son centre et à ses axes, est $\frac{x'^2 + y'^2}{\mu^2 k^2} - \frac{z'^2}{k^2} = 1$. Pour le rapporter aux axes primitifs, il faut transporter l'origine au point O et faire tourner les axes Ox' et Oz' de l'angle α, dont la tangente est μ.

Les formules de transformation sont

$$y' = y - \mu k,\quad x' = x\cos\alpha - z\sin\alpha,\quad z' = x\sin\alpha + z\cos\alpha.$$

L'équation de l'hyperboloïde H devient, en chassant les dénominateurs,

$$\begin{aligned}(\cos^2\alpha - \mu^2\sin^2\alpha)x^2 + y^2 + (\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha)z^2 \\ - 2(1+\mu^2)\sin\alpha\cos\alpha\, xz - 2\mu ky = 0.\end{aligned}$$

Mais on a

$$\sin\alpha = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}},\quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}};$$

en remplaçant $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ par leurs valeurs, il vient

$$(H)\qquad (1-\mu^2)x^2 + y^2 - 2\mu xz - 2\mu ky = 0.$$

2° Les sommets de l'hyperboloïde conjugué H' sont sur l'axe, à une distance du centre égale à k, et les foyers à la distance $k\sqrt{1+\mu^2}$.

On a donc pour coordonnées des sommets, α étant l'angle de l'axe avec OZ,

$$\begin{aligned} x &= \pm k\sin\alpha = \pm\frac{\mu k}{\sqrt{1+\mu^2}}, \\ y &= \mu k,\quad z = \pm k\cos\alpha = \pm\frac{k}{\sqrt{1+\mu^2}}, \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en éliminant μ,

$$x^2 + z^2 = k^2,$$
$$yz = kx;$$

le lieu des sommets est l'intersection du paraboloïde S et du cylindre $x^2 + z^2 = k^2$. Les coordonnées des foyers sont $x = \pm \mu k$, $y = \mu k$, $z = \pm k$. Les foyers sont donc situés sur les deux droites $z = k, y = x$ et $z = -k, y = -x$.

3° Si, par le foyer F ($x = \mu k, y = \mu k, z = k$), on mène un plan P parallèle à la perpendiculaire commune aux deux droites G et D, c'est-à-dire parallèle à l'axe Oy, et faisant avec D un angle supplémentaire de l'angle que l'axe G fait avec D, ce plan coupera évidemment la droite D à la distance $z = 2k$ de l'origine. Le lieu des droites qui joignent ce point à l'un des points où ce plan coupe la courbe d'intersection des surfaces S et H est donc un cône.

On a :

Équation du plan P:

$$\mu z + x = 2\mu k; \tag{1}$$

Équation de la surface S:

$$yz = kx; \tag{2}$$

Équation de l'hyperboloïde H :

$$(1 - \mu^2) x^2 + y^2 - 2\mu xz - 2\mu ky = 0; \tag{3}$$

Équations d'une génératrice du cône:

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z - 2k}{z - 2k} = \frac{1}{\lambda}. \tag{4}$$

On obtiendra l'équation du cône en éliminant x, y, z, λ, μ entre ces six équations, ce qui donne, en remettant les petites lettres,

$$(z - 2k^2)(x^2 + y^2)(3x - 2y) - x^4 (x - 2y) = 0. \tag{5}$$

Remarque. — Tous les plans P passent par la droite

$$z = 2k, \; x = 0,$$

qui se trouve ainsi introduite dans l'équation du cône comme solution étrangère.

On trouverait de même, en remplaçant le foyer F par le foyer F', le cône

$$(z + 2k)^2 (x^2 + y^2)(3x + 2y) - x^4 (x + 2y) = 0,$$

renfermant la solution étrangère $z = -2k$, $x = 0$.

Note. — La même question a été résolue par MM. Escary et Gambey.