NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MORET-BLANC

Concours d'admission à l'École centrale. 2e session

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 203-206

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__203_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE

(voir 2e série, t. XVII, p. 31);

2e SESSION.

PAR M. MORET-BLANC.

On donne un trapèze isoscèle ABCD *dont la hauteur est* $2h$, *la demi-somme des bases* $2a$, *et les angles obtus* α. *On considère toutes les coniques circonscrites à ce trapèze :*

1° *Former l'équation générale de ces coniques ;*

2° *Trouver le lieu des points de contact des tangentes* *menées à chacune d'elles parallèlement au côté* BC, *et construire ce lieu, après avoir vérifié que le côté* BC *en fait partie ;*

3° *Étant donné un point de ce lieu, reconnaître le genre de la conique circonscrite au trapèze, qui passe par ce point.*

1° Prenons pour axe des x la droite qui joint les milieux des côtés non parallèles du trapèze et le milieu de cette droite pour origine des coordonnées rectangulaires. Si l'on pose $\tang \alpha = m$, les équations des bases et des côtés non parallèles du trapèze seront respectivement

$$y \mp h = 0,$$
$$y + ma \mp mx = 0,$$

et l'équation générale des coniques circonscrites au trapèze sera

$$(y + ma)^2 - m^2x^2 = k(y^2 - h^2)$$

ou

$$(1) \qquad m^2x^2 + (k-1)y^2 - 2may - m^2a^2 - kh^2 = 0.$$

La courbe est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que k est supérieur, égal ou inférieur à 1.

2° Les points de contact des tangentes parallèles à BC doivent satisfaire en outre à l'équation $f'_x + mf'_y = 0$ ou

$$(2) \qquad mx + (k-1)y - ma = 0.$$

On obtiendra l'équation du lieu des points de contact en éliminant k entre les équations (1) et (2). De la dernière on tire

$$k - 1 = \frac{m(a-x)}{y}, \quad k = \frac{y + ma - mx}{y},$$

et, en substituant dans l'équation (1), il vient

$$(y - mx + ma)\,[m(xy + ay) + h^2] = 0,$$

équation qui se décompose en deux autres

$$y - mx + ma = 0,$$
$$y(x + a) = -\frac{h^2}{m}.$$

La première représente la droite BC, qui appartient au lieu cherché. En effet, le système des droites AD, BC fait partie des coniques circonscrites au trapèze, et la droite BC est sa propre tangente.

La seconde représente une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes l'axe des x et la parallèle à l'axe des y menée par le milieu de AD. Elle passe par le point

$$y = h,\quad x = -a - \frac{h}{m} = -a + h\cot(\pi - \alpha),$$

facile à déterminer (*). Connaissant les asymptotes et un point, il est facile de construire la courbe.

3° x et y étant les coordonnées d'un point donné du lieu, on a

$$k - 1 = \frac{-m(x - a)}{y};$$

ce point appartiendra à une ellipse si $x - a$ et y sont de même signe, car $-m$ est positif ; il appartiendra à une hyperbole si $x - a$ et y sont de signes contraires, et à une parabole si $x = a$.

(*) Ce point est le point donné D. La droite AD, dont l'équation est $mx + ma = -y$, coupe l'hyperbole aux points A et D. Le côté AD du trapèze est un diamètre de cette hyperbole, dont le conjugué est égal et parallèle à BC. (G.)

Les points de contact appartenant aux hyperboles sont donc compris entre les droites $x = -a$ et $x = +a$; les points en dehors de ces deux parallèles appartiennent aux ellipses.

Note. — La même question a été résolue par MM. Lez, Gambey et Georges Lambiotte, élève à l'École Polytechnique de Bruxelles.