NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. CHAMBON

Concours d'admission à l'École centrale. 1re session. Juillet 1877

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 200-203

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__200_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE.

1re SESSION. — JUILLET 1877.

(voir 2e série, t. XVII, p. 29),

PAR M. J. CHAMBON.

On donne un triangle AOB, *rectangle en* O, *et l'on considère toutes les hyperboles qui passent aux points* A *et* B *et ont leurs asymptotes parallèles aux côtés* OA, OB.

1° *Former l'équation générale de ces hyperboles ;*

2° *Former l'équation du lieu des sommets de ces hyperboles et construire ce lieu ;*

3° *Prenant un point* P *sur le lieu trouvé, construire celle des hyperboles considérées qui a un sommet en* P, *et reconnaître sur quelle partie du lieu doit être ce point* P, *pour que* A *et* B *appartiennent soit à une* *même branche, soit aux deux branches de cette hyperbole.*

1° En prenant pour axes des coordonnées les côtés OA, OB du triangle AOB, l'équation générale des hyperboles satisfaisant à l'énoncé du problème aura la forme

$$xy + \mu x + \nu y + \lambda = 0;$$

et, si a et b sont les longueurs OA et OB, ces hyperboles devant passer aux points A et B, les paramètres λ, ν, μ satisfont aux relations

$$\mu a + \lambda = 0, \quad \nu b + \lambda = 0,$$

en vertu desquelles l'équation précédente devient

$$(1) \qquad xy - \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right) = 0.$$

2° Le lieu des sommets des hyperboles (1) s'obtiendra en éliminant λ entre l'équation (1) et l'équation générale de l'axe de ces hyperboles. Or les coordonnées du centre étant $x = \frac{\lambda}{b}$, $y = \frac{\lambda}{a}$, l'équation générale de l'axe est

$$(2) \qquad y - \frac{\lambda}{a} = x - \frac{\lambda}{b}$$

ou

$$(3) \qquad y - \frac{\lambda}{a} = \frac{\lambda}{b} - x,$$

suivant que l'on considère l'une ou l'autre des bissectrices des angles des asymptotes.

En éliminant λ entre (1) et (2), et simplifiant le résultat, on a l'équation

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - x + y = 0.$$

Et, en éliminant le même paramètre entre (1) et (3), on trouve pour résultat

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - x - y = 0.$$

Transportons les axes des coordonnées, parallèlement à eux-mêmes, au point $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$, centre commun de ces deux courbes, les équations de ces dernières deviendront respectivement

$$(4) \qquad \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - \frac{a-b}{4} = 0,$$

$$(5) \qquad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - \frac{a+b}{4} = 0.$$

Les quantités a, b étant positives, le lieu des sommets des hyperboles (1) se compose d'une hyperbole et d'une ellipse ayant même centre, même direction d'axes et circonscrites au rectangle OACB, construit sur les côtés OA, OB du triangle AOB; en outre, ces deux courbes sont homofocales, et la distance du foyer au centre est $\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4}}$ ou $\sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{4}}$ suivant que a est plus grand ou plus petit que b; l'axe transverse de l'hyperbole est parallèle au plus grand des côtés OA, OB du triangle AOB.

Dans le cas particulier où le triangle AOB devient isoscèle, l'hyperbole se réduit aux diagonales du carré et l'ellipse au cercle circonscrit à ce carré.

3° Si l'on remarque que le lieu des centres des hyperboles (1) est la diagonale OC du rectangle OACB, pour avoir le centre de celle de ces hyperboles qui a son sommet en un point P, pris soit sur l'hyperbole, soit sur l'ellipse, il n'y a qu'à mener par ce point une parallèle à la bissectrice de l'angle AOB dans le premier cas, et de son supplément dans le second cas, parallèle qui coupe la diagonale OC au centre cherché. L'hyperbole demandée est alors facile à construire.

De la manière d'obtenir ce centre résultent les conséquences suivantes :

Lorsque le point P est sur l'hyperbole (4), le centre correspondant de l'hyperbole (1) se trouve toujours en dehors du rectangle et, par suite, les points A et B, situés dans le même angle des asymptotes, appartiennent à la même branche.

Lorsque le point P est situé sur l'ellipse (5), le centre de la courbe (1) est à l'intérieur du rectangle et, par suite, les points A et B appartiennent aux deux branches de l'hyperbole (1).

Note. — La même question a été résolue par MM. Lez, Moret-Blanc, Gambey, A. Boilleau, Georges Lambiotte.

M. Boilleau a généralisé la question, en supposant que les droites OA, OB forment un angle *quelconque* donné.