NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. TOURRETTES

Concours d'admission à l'École normale supérieure (année 1877)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 195-200

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__195_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (ANNÉE 1877);

PAR M. A. TOURRETTES.

On considère toutes les coniques circonscrites à un triangle ABC *rectangle en* A, *et telles que les tangentes en* B *et* C *à ces coniques aillent se couper sur la hauteur du triangle. On demande :*

1° *Le lieu du point de concours des normales en* B *et* C *à ces coniques;*

2° *Le lieu des centres de ces coniques; on distinguera les points du lieu qui sont centres des ellipses de ceux qui sont centres des hyperboles;*

3° *Le lieu des pôles d'une droite quelconque* D. *Ce lieu est une conique; on considère toutes les droites* D *pour lesquelles cette conique est une parabole, et l'on demande le lieu des projections du point* A *sur ces droites.*

Je prends pour axes les côtés AB, AC du triangle, et je pose $AB = a$, $AC = b$. Soit $M(\alpha, \beta)$ un point pris sur la hauteur AD du triangle; je tire MB, MC que je considère comme deux tangentes à l'une des coniques circonscrites au triangle.

1° Les coefficients angulaires de ces tangentes étant $\frac{\beta}{\alpha - a}$, $\frac{\beta - b}{\alpha}$, les normales en B et C auront pour équations

$$(1) \qquad y = \frac{a - \alpha}{\beta}(x - a),$$

$$(2) \qquad y - b = \frac{\alpha}{b - \beta}x;$$

pour avoir le lieu des points de concours de ces normales, il suffit d'éliminer α, β entre (1), (2) et l'équation

$$(3) \qquad a\alpha - b\beta = 0,$$

qui exprime que le point M est sur la hauteur AD. On trouve sans peine les deux équations

$$ay + bx - ab = 0,$$
$$ax - by = a^2 - b^2.$$

La première est l'équation de CD et répond au cas où le point M est à l'infini sur AD : alors la conique circonscrite est un cercle.

La deuxième donne une parallèle à la hauteur, que l'on construira facilement.

2° Pour avoir l'équation générale des coniques circonscrites au triangle, je forme celles des tangentes : celle de MB,

$$(4) \qquad (y-\beta)(a-\alpha)+\beta(x-\alpha)=0,$$

celle de MC,

$$(5) \qquad \alpha(y-\beta)+(b-\beta)(x-\alpha)=0,$$

et celle de BC,

$$(6) \qquad ay+bx-ab=0.$$

Alors l'équation

$$[(y-\beta)(a-\alpha)+\beta(x-\alpha)] \\ \times[\alpha(y-\beta)+(b-\beta)(x-\alpha)]-\lambda(ay+bx-ab)^2=0,$$

où λ est un paramètre arbitraire, est celle des coniques inscrites dans l'angle BMC; en exprimant qu'elle est satisfaite par les coordonnées du point A, j'aurais l'équation demandée, que l'on met aisément sous la forme

$$(7) \qquad b\beta x^2+ab\,xy+a\alpha y^2-ab\beta x-ab\alpha y=0,$$

après avoir supprimé le facteur $ab-a\beta-b\alpha$; ce facteur ne devient nul que quand le point M est en D; alors la conique est l'ensemble de deux droites confondues avec CB. Elle ne répond donc pas à la question.

Le lieu des centres des coniques (7) s'obtiendra en éliminant α, β entre les dérivées $f'x=0$, $f'y=0$, tirées de l'équation (7), et l'équation (3). On trouvera

$$(8) \qquad x^2-y^2-\frac{1}{2}(ax-by)=0,$$

équation d'une hyperbole équilatère ayant ses asymptotes parallèles aux bissectrices des axes, le centre au point $\frac{a}{4}$, $\frac{b}{4}$, et passant par l'origine, où elle est tangente à la hauteur AD, et par les milieux E, F, H des trois côtés AB, AC, CB.

Le binôme caractéristique des coniques (7) est $ab - 4\alpha\beta$, ou, au moyen de (3), $b^2 - 4\alpha^2$.

Donc, si

$$b^2 - 4\alpha^2 < 0, \text{ ellipses,}$$
$$b^2 - 4\alpha^2 = 0, \text{ parabole,}$$
$$b^2 - 4\alpha^2 > 0, \text{ hyperboles.}$$

Je construis les deux droites KI, K′I′, données par $\alpha = \pm \frac{b}{2}$, et qui vont couper AD prolongée en des points I et I′ (*).

Par conséquent, si M, étant toujours sur la hauteur L′ADL indéfiniment prolongée, se trouve entre les deux parallèles IK, I′K′, les coniques (7) seront des hyperboles; s'il se trouve en dehors, sur IL ou I′L′, elles seront des ellipses.

Reste à savoir quelles seront les différentes parties de la courbe (8) qui répondent aux positions successives de M. Je remarque que, si l'on joint le point M au milieu H de CB, le second point d'intersection sera le centre de la conique (7) correspondante. Il est facile de voir que les droites IH et I′H sont respectivement parallèles aux asymptotes de l'hyperbole (8) et que la tangente en H est parallèle à la hauteur AD, parce que les points A et H sont symétriques par rapport au centre de l'hyperbole.

Si donc le point M se déplace de I vers L et de I′ vers L′, on aura la branche de droite; s'il se déplace entre I et I′, on aura la branche de gauche.

En résumé, les centres des ellipses sont sur la branche

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

de droite, et ceux des hyperboles sur la branche de gauche.

3° Soit $mx + ny + p = 0$ l'équation de la droite D. Son pôle par rapport aux coniques (7) sera donné par

$$\frac{2b\beta x + aby - ab\beta}{m} = \frac{abx + 2a\alpha y - ab\alpha}{n}$$
$$= -\frac{ab\beta x + ab\alpha y}{p}.$$

On aura le lieu des pôles en éliminant α et β entre ces deux équations et l'équation (3) ; ce qui donne

$$(9)\qquad \left\{ \begin{aligned} &(2p + am)x^2 - (an - bm)xy \\ &\quad - (2p + bn)y^2 - apx + bpy = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette conique sera une parabole, si l'on a

$$(10)\qquad (an + bm)^2 + 8p(am + bn) + 16p^2 = 0\ (*).$$

Le lieu des projections du point A sur la droite D, quand la conique (9) est une parabole, s'obtiendra en éliminant m, n, p entre (10) et les deux équations

$$mx + ny + p = 0,$$
$$my - nx = 0.$$

On en tire

$$m = -\frac{px}{x^2 + y^2},\quad n = -\frac{py}{x^2 + y^2},$$

que l'on substitue dans (10). Il vient

$$16(x^2 + y^2) - 8(ax + by)(x^2 + y^2) + (ay + bx)^2 = 0,$$

(*) Lorsque les coefficients m, n, p remplissent la condition exprimée par la relation (10), la droite D est tangente à l'hyperbole équilatère que l'équation (8) représente; il s'ensuit que le lieu des projections du point A sur la droite D est la podaire de A par rapport à cette hyperbole. (G.)

ou, en coordonnées polaires,

$$\rho = \frac{1}{4}(a\cos\theta + b\sin\theta) \pm \frac{1}{4}\sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{\cos 2\theta}.$$

Cette courbe se construit facilement au moyen du cercle

$$\rho_1 = \frac{1}{4}(a\cos\theta + b\sin\theta),$$

et de la lemniscate

$$\rho_2 = \pm\sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{\cos 2\theta}.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Genty, Fauquembergue, Moret-Blanc, Gambey.

La solution de M. Genty est entièrement géométrique.