Nouvelles annales de mathématiques

Lez

Concours d'admission à l'École polytechnique (année 1877)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 193-195

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__193_0>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (ANNÉE 1877)

(voir 2ᵉ série, t XVI, p. 379);

Par M. LEZ.

Composition de Mathématiques.

On donne l'équation $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{6^2} = 1$ *d'une hyperbole rapportée à ses axes et les coordonnées* (μ, ν) *d'un point* M *de son plan.*

Par le point M *on mène deux tangentes à l'hyperbole la touchant aux points* A *et* B : *trouver l'équation du cercle passant par les points* A, B *et le centre* O *de l'hyperbole.*

Ce cercle rencontre l'hyperbole en deux points C *et* D, *distincts de* A *et de* B : *trouver l'équation de la droite* CD.

Si le point M *décrit une droite du plan, aux diverses positions du point* M *correspondront diverses positions de la droite* CD : *quel est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre de l'hyperbole sur ces droites?*

On sait que, par rapport à l'hyperbole, dont l'équation est

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \tag{1}$$

la polaire AB d'un point M (μ, ν) a pour équation

$$b^2\mu x - a^2\nu y - a^2b^2 = 0.$$

Or, une conique passant par les quatre points où cette droite et une autre $Bx + Ay - AB = 0$ rencontrait la courbe (1) sera représentée par

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 \\ - K(b^2\mu x - a^2\nu y - a^2b^2) \times (Bx + Ay - AB) = 0,$$

soit

$$(b^2 - KBb^2\mu)x^2 + (KAa^2\nu - a^2)y^2 \\ + K(Ba^2\nu - Ab^2\mu)xy + K(Ba^2b^2 + ABb^2\mu)x \\ + K(Aa^2b^2 - ABa^2\nu)y - a^2b^2(1 + KAB) = 0.$$

Pour que la conique passe par l'origine O des coordonnées, il faut que $K = -\frac{1}{AB}$, et, pour qu'elle devienne un cercle, on doit avoir

$$Ba^2\nu = Ab^2\mu \quad \text{et} \quad b^2 + a^2 = KBb^2\mu + KAa^2\nu.$$

De ces trois relations on tire

$$A = -\frac{b^4\mu^2 + a^4\nu^2}{b^2\mu(a^2 + b^2)},$$

$$B = -\frac{b^4\mu^2 + a^4\nu^2}{a^2\nu(a^2 + b^2)},$$

$$K = -\frac{a^2b^2\mu\nu(a^2 + b^2)^2}{(b^4\mu^2 + a^4\nu^2)^2}.$$

Il est maintenant facile de trouver que le cercle passant par le centre de l'hyperbole et par les points A, B, C, D a pour équation

$$x^2 + y^2 + \frac{\mu(a^4b^2 + a^2b^4 - b^4\mu^2 - a^4\nu^2)x}{a^2(a^2\nu^2 - b^2\mu^2)} \\ + \frac{\nu(a^4b^2 + a^2b^4 + b^4\mu^2 + a^4\nu^2)y}{b^2(a^2\nu^2 - b^2\mu^2)} = 0,$$

et que la droite CD est représentée par

$$(2) \quad b^2\mu(a^2 + b^2)x + a^2\nu(a^2 + b^2)y + b^4\mu^2 + a^4\nu^2 = 0.$$

L'équation de la perpendiculaire abaissée du centre O sur CD est

$$y = \frac{a^2\nu}{b^2\mu}x.$$

Cette perpendiculaire rencontre CD en un point ayant pour coordonnées

$$(3) \qquad x = -\frac{b^2\mu}{a^2+b^2}, \quad y = -\frac{a^2\nu}{a^2+b^2}.$$

Or, le point M décrivant la droite

$$(4) \qquad nx + my - mn = 0,$$

les variables μ, ν sont liées par la relation

$$(5) \qquad n\mu + m\nu - mn = 0.$$

Pour obtenir le lieu cherché, il suffit d'éliminer μ, ν entre les relations (3) et (4), ce qui donne

$$b^2m^2(a^2+b^2)y + a^2n(a^2+b^2)x + a^2b^2mn = 0,$$

équation qui représente une droite.

Note. — Solutions analogues de MM. E. Fauquembergue, maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin; Gambey; Moret-Blanc; Thornton.