NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

S. RÉALIS

Questions 833 et 748

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 190-191

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__190_1>

Questions 833 *et* 748

(voir 2ᵉ série, t. VI, p. 480 et 528, et t. IV, p. 431);

PAR M. S. REALIS.

Si les nombres entiers a, b, c sont racines de l'équation

$$x^3 - px + q = 0,$$

on aura

$$p^2 + 3y'a^2 = r'^2,$$
$$p^2 + 3y''b^2 = r''^2,$$
$$p^2 + 3y'''c^2 = r'''^2,$$

y', y'', y''' et r', r'', r''' étant racines entières de deux équations cubiques homogènes que l'on peut construire, et dont les coefficients sont des fonctions rationnelles et entières de p et q. Le produit $r'r''r'''$, pris positivement, sera un carré. (S. RÉALIS.)

Posant

$$\begin{aligned} y' &= 3a^2 - 2p, \\ y'' &= 3b^2 - 2p, \\ y''' &= 3c^2 - 2p, \end{aligned}$$

y', y'', y''' seront racines de l'équation

$$y^3 - 3p^2 y + 2p^3 - 27q^2 = 0,$$

et l'on aura, en observant que $a + b + c = 0$,

$$\begin{aligned} p^2 + 3y' a^2 &= (a - b)^2 (a - c)^2 = r'^2, \\ p^2 + 3y'' b^2 &= (b - c)^2 (b - a)^2 = r''^2, \\ p^2 + 3y''' c^2 &= (c - a)^2 (c - b)^2 = r'''^2. \end{aligned}$$

Ces formules font voir que

$$r' r'' r''' = [(a - b)(b - c)(c - a)]^2,$$

et permettent de construire l'équation ayant r', r'', r''' pour racines, savoir

$$r^3 - 3pr^2 + 4p^3 - 27q^2 = 0.$$

Si a, b, c sont entiers, les y et les r sont aussi nécessairement entiers.

De là l'énoncé de la question.

Ajoutons que l'on déduit de ce qui précède

$$\begin{aligned} r' + r'' + r''' &= 3p, \\ r'^2 + r''^2 + r'''^2 &= (3p)^2. \end{aligned}$$

Ces formules, où p peut représenter tout nombre de la forme $3u^2 + v^2$, et où les valeurs numériques des entiers r', r'', r''' donnent un produit égal à un carré, ces formules, dis-je, expriment une propriété du nombre $3p$ qui nous paraît digne d'être signalée.

Note. — La solution de la question 833 entraîne celle de la question analogue 748 (*voir* 2e série, t. IV, p. 431).