GAMBEY

Solution de la question d'analyse donnée au concours d'agrégation en 1871

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 188-190

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__188_1>

SOLUTION DE LA QUESTION D'ANALYSE

DONNÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1871 ;

PAR M. GAMBEY.

Étant donnée une ligne S *dans l'espace, on détermine la courbe* S′, *lieu des centres des sphères d'un rayon donné* R, *ayant avec cette courbe un contact du second ordre. On propose de faire voir que, réciproquement, la courbe proposée* S *est, pour la courbe* S′, *le lieu des centres des sphères du même rayon* R, *ayant avec elle un contact du second ordre.*

Nous définirons la courbe donnée S par les équations

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s), \quad z = \theta(s),$$

l'arc s étant pris pour variable indépendante.

Soit la sphère

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2 - R^2 = 0.$$

Nous exprimerons qu'elle a un contact du second ordre avec la courbe S en posant les relations suivantes (Ch. Hermite, *Cours d'Analyse*) :

$$(1) \quad \begin{cases} (\varphi - a)^2 + (\psi - b)^2 + (\theta - c)^2 - R^2 = 0, \\ (\varphi - a)\varphi' + (\psi - b)\psi' + (\theta - c)\theta' = 0, \\ (\varphi - a)\varphi'' + (\psi - b)\psi'' + (\theta - c)\theta'' = 0, \end{cases}$$

où φ, ψ, θ sont mis pour $\varphi(s)$, $\psi(s)$, $\theta(s)$, et où les dérivées sont prises par rapport à s.

Ces trois équations en a, b, c définissent une courbe S′, car on peut en tirer des valeurs de la forme

$$a = \varphi_1(s), \quad b = \psi_1(s), \quad c = \theta_1(s).$$

En substituant ces valeurs dans ces équations, on obtiendra donc les trois identités

$$(2) \quad \begin{cases} (\varphi - \varphi_1)^2 + (\psi - \psi_1)^2 + (\theta - \theta_1)^2 - R^2 = 0, \\ (\varphi - \varphi_1)\varphi' + (\psi - \psi_1)\psi' + (\theta - \theta_1)\theta' = 0, \\ (\varphi - \varphi_1)\varphi'' + (\psi - \psi_1)\psi'' + (\theta - \theta_1)\theta'' = 0. \end{cases}$$

De même, les trois relations suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} (\varphi_1 - a_1)^2 + (\psi_1 - b_1)^2 + (\theta_1 - c_1)^2 - R^2 = 0, \\ (\varphi_1 - a_1)\varphi'_1 + (\psi_1 - b_1)\psi'_1 + (\theta_1 - c_1)\theta'_1 = 0, \\ (\varphi_1 - a_1)\varphi''_1 + (\psi_1 - b_1)\psi''_1 + (\theta_1 - c_1)\theta''_1 = 0, \end{cases}$$

définissent une courbe S, lieu des centres des sphères,

$$(X - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (Z - c_1)^2 - R^2 = 0,$$

ayant avec la courbe S′ un contact du second ordre.

Je dis maintenant qu'en posant dans les équations (3)

$$a_1 = \varphi(s), \quad b_1 = \psi(s), \quad c_1 = \theta(s),$$

ces équations deviendront des identités.

En effet, nous aurons

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\varphi_1 - \varphi)^2 + (\psi_1 - \psi)^2 + (\theta_1 - \theta)^2 - R^2 = 0, \\ (\varphi_1 - \varphi)\varphi'_1 + (\psi_1 - \psi)\psi'_1 + (\theta_1 - \theta)\theta'_1 = 0, \\ (\varphi_1 - \varphi)\varphi''_1 + (\psi_1 - \psi)\psi''_1 + (\theta_1 - \theta)\theta''_1 = 0, \end{array} \right.$$

et l'on voit immédiatement que la première de ces relations est une identité, puisqu'elle est la même que la première des relations (2). Quant aux deux autres, on s'assurera que ce sont des identités en prenant deux fois de suite la dérivée de la première des relations (2) par rapport à s et tenant compte des identités qu'on obtiendra successivement et de celle-ci :

$$\varphi'^2 + \psi'^2 + \theta'^2 = \varphi_1'^2 + \psi_1'^2 + \theta_1'^2 = 1. \quad \text{C. Q. F. D.}$$