Nouvelles annales de mathématiques

S. Realis

Particularités relatives à l'équation du troisième degré

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 178-181

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__178_1>

PARTICULARITÉS RELATIVES A L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ;

PAR M. S. REALIS.

Étant donnée l'équation à coefficients entiers

$$x^3 + Px + Q = 0,$$

on en désigne les trois racines par a, b, c, et l'on fait, pour abréger,

$$P^2 - 4Qx = \varphi(x).$$

Cela posé, la considération de la fonction $\varphi(x)$ conduit aux propositions suivantes, faciles à démontrer :

1° Si a est racine entière de l'équation proposée, la quantité $\varphi(a)$ est égale à un carré : le produit $\varphi(b)\,\varphi(c)$ est le carré d'un nombre appartenant à la forme $5u^2 - v^2$ et à la forme équivalente $u^2 - 5v^2$.

2° Si les trois racines de l'équation sont entières, la quantité $\varphi(a)$, où a désigne l'une quelconque d'entre elles, est le carré d'un nombre compris dans les deux formes indiquées. En ce cas, si les racines b, c sont de même parité, le produit $\varphi(b)\varphi(c)$ est le carré d'un nombre appartenant en outre à l'une des formes $u^2 - 16v^2$, $16u^2 - v^2$.

3° La racine a étant entière, et b, c étant exprimées par des nombres complexes entiers (*), $\varphi(a)$ est le carré d'un nombre de la forme $5u^2+v^2$: le produit $\varphi(b)\varphi(c)$ est le carré d'un nombre appartenant en même temps aux formes $5u^2+v^2$, $5u^2-v^2$, u^2-5v^2, u^2+16v^2.

4° Quelle que soit la nature des trois racines a, b, c, si les coefficients P, Q sont entiers, le produit $\varphi(a)\varphi(b)\varphi(c)$ se réduit à un carré.

Si, de plus, la quantité $-(4P^3+27Q^2)$ est égale à un carré, le même produit est le carré d'un nombre renfermé dans les deux formes équivalentes $5u^2-v^2$, u^2-5v^2.

Si c'est la quantité $4P^3+27Q^2$ qui est égale à un carré, le produit considéré est le carré d'un nombre de la forme $5u^2+v^2$.

Remarque. — Les formules qui établissent les résultats indiqués trouvent une application utile dans certaines questions d'Analyse indéterminée. On en déduit, par exemple, l'identité

$$(5\alpha^2-\beta^2)^2+[5\alpha^2-(2\alpha-\beta)^2]^2 \\ +[5\alpha^2-(2\alpha+\beta)^2]^2=3(3\alpha^2+\beta^2)^2,$$

qui fournit une infinité de solutions entières de l'équation indéterminée

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=3z^2,$$

au moyen de valeurs de z_1, z_2, z_3 contenues dans la forme $5u^2-v^2$, et de valeurs de z contenues dans la forme $3u^2+v^2$.

L'identité analogue

$$[3(\alpha+\beta)^2-(3\alpha+\beta)^2]^2 \\ +[3(2\alpha)^2-(3\alpha-\beta)^2]^2+[3(\alpha-\beta)^2-2(\beta)^2]^2=6(3\alpha^2+\beta^2)^2$$

(*) *Voir*, pour les racines complexes des equations, le tome III de la 1re série, pp. 41, 145 et 325.

ne se déduit pas directement des formules mentionnées, mais on y arrive par des considérations semblables à celles qui amènent les propositions énoncées plus haut. Elle fournit, comme on voit, une infinité de solutions entières de l'équation

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 6z^2,$$

au moyen de valeurs de z renfermées dans la forme $3u^2 + v^2$, et de valeurs de z_1, z_2, z_3 renfermées dans l'une ou l'autre des formes $3u^2 - v^2$, $u^2 - 3v^2$.

Au point de vue de la théorie des nombres, les identités précédentes constituent des théorèmes remarquables touchant la décomposition de $3z^2$ et de $6z^2$ en trois carrés, lorsque z est un nombre de la forme indiquée.

La considération de fonctions autres que $\varphi(x)$, composées de même avec les racines de l'équation du troisième degré, amène des résultats plus généraux. Nous nous bornerons à énoncer la proposition suivante :

Le nombre z étant de la forme $3u^2 + v^2$, et le coefficient k étant une somme de trois carrés entiers, le produit kz^2 est la somme de trois carrés compris dans une même forme

$$(Au^2 + Buv + Cv^2)^2,$$

où les coefficients A, B, C *sont des entiers ne dépendant que de k, et les entiers variables u, v peuvent être positifs ou négatifs.*

Une conséquence immédiate de l'identité qui justifie et complète cette proposition consiste en ce que *la somme de trois carrés entiers peut être transformée, d'une infinité de manières et au moyen de formules directes, en une somme de trois carrés rationnels.*

Il est à propos de rappeler ici, d'après Fermat et Euler, que la forme quadratique $3u^2 + v^2$ peut représenter tous les nombres premiers compris dans la forme linéaire $6n + 1$: qu'elle peut représenter, par conséquent, tous les nombres dont les facteurs premiers appartiennent à cette forme linéaire (*voir*, au t. VIII des *Nouveaux Commentaires de Pétersbourg*, le Mémoire d'Euler : *Supplementum quorumdam theorematum arithmeticorum*, etc. ; *voir* aussi, au t. III des *OEuvres de Lagrange*, le Mémoire intitulé : *Recherches d'Arithmétique*).