Nouvelles annales de mathématiques

Laguerre

Sur les normales aux surfaces du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 163-178

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__163_1>

SUR LES NORMALES AUX SURFACES DU SECOND ORDRE ;

PAR M. LAGUERRE.

1. Étant donnés une surface du second ordre K ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}-1=0,$$

et un point M ayant pour coordonnées α, β, γ, on sait que l'on peut de ce point mener six normales à la surface, les pieds de ces normales étant déterminés par les équations

$$x=\frac{a\alpha}{a-\rho},\quad y=\frac{b\beta}{b-\rho},\quad z=\frac{c\gamma}{c-\rho},$$

où ρ est une des racines de l'équation

$$(1)\qquad \frac{a\alpha^2}{(\alpha-\rho)^2}+\frac{b\beta^2}{(b-\rho)^2}+\frac{c\gamma^2}{(c-\rho)^2}-1=0.$$

Ces six points sont d'ailleurs déterminés par l'intersection de K avec la cubique gauche H, définie par les équations

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)xy+\frac{\alpha y}{b}-\frac{\beta x}{a}=0,\quad \left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)yz+\frac{\beta z}{c}-\frac{\gamma y}{b}=0,$$

$$\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)zx+\frac{\gamma x}{a}-\frac{\alpha z}{c}=0.$$

Cela posé, déterminons les quantités ξ, η, ζ, P, Q, R, X, Y, Z et G, de telle sorte que l'on ait identiquement

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{x\xi}{a}+\frac{y\eta}{b}+\frac{z\zeta}{c}-1\right)\\
&\quad\times(x^2+y^2+z^2-2\mathrm{X}x-2\mathrm{Y}y-2\mathrm{Z}z+\mathrm{G})\\
&\quad=(x\xi+y\eta+z\zeta+\mathrm{G})\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}-1\right),\\
&\quad+(y\xi-x\eta+\mathrm{R})\left[\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)xy+\frac{\alpha y}{b}-\frac{\beta x}{a}\right],\\
&\quad+(z\eta-y\zeta+\mathrm{P})\left[\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)yz+\frac{\beta z}{c}-\frac{\gamma y}{b}\right],\\
&\quad+(x\zeta-z\xi+\mathrm{Q})\left[\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)zx+\frac{\gamma x}{a}-\frac{\alpha z}{c}\right].
\end{aligned}\right.$$

On aura, entre ces dix quantités, les neuf relations

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
2\mathrm{X}\xi+\beta\eta+\gamma\zeta&=-(\mathrm{G}+a),\\
2\mathrm{Y}\eta+\gamma\zeta+\alpha\xi&=-(\mathrm{G}+b),\\
2\mathrm{Z}\zeta+\alpha\xi+\beta\eta&=-(\mathrm{G}+c);
\end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{R}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)&=\frac{(2\mathrm{X}-\alpha)\eta}{b}+\frac{(2\mathrm{Y}-\beta)\xi}{a},\\
\mathrm{P}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)&=\frac{(2\mathrm{Y}-\beta)\zeta}{c}+\frac{(2\mathrm{Z}-\gamma)\eta}{b},\\
\mathrm{Q}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)&=\frac{(2\mathrm{Z}-\gamma)\xi}{a}+\frac{(2\mathrm{X}-\alpha)\zeta}{c};
\end{aligned}\right.$$

et

$$(5)\quad \begin{cases} Q\gamma - R\beta = 2aX + (G + a)\xi, \\ R\alpha - P\gamma = 2bY + (G + b)\eta, \\ P\beta - Q\alpha = 2cZ + (G + c)\zeta. \end{cases}$$

Comme nous disposons de dix quantités indéterminées pour satisfaire à ces neuf relations, on pourra y satisfaire d'une infinité de manières.

Considérons maintenant l'équation (2), elle exprime évidemment que, des six pieds des normales que l'on peut abaisser du point M, quatre sont situés sur la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2Xx - 2Yy - 2Zz + G = 0$$

et les deux autres dans le plan

$$\frac{x\xi}{a} + \frac{y\eta}{b} + \frac{z\zeta}{c} - 1 = 0,$$

dont le pôle, par rapport à la surface du second ordre K, a pour coordonnées ξ, η, ζ; et, comme ces quantités renferment un paramètre arbitraire, elles sont les coordonnées d'un point quelconque de la polaire, par rapport à K, de la corde qui joint les pieds des deux dernières normales dont je viens de parler.

2. Désignons par S la sphère dont l'équation est

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2Xx - 2Yy - 2Zz + G = 0;$$

les coordonnées de son centre sont évidemment X, Y, Z et G est la puissance de l'origine relativement à cette sphère. Elle contient, comme je l'ai dit, quatre des pieds des normales que l'on peut abaisser du point M. Soient D la corde qui joint les pieds des deux autres normales et Δ sa polaire réciproque par rapport à K. D'après une dénomination généralement adoptée, Δ est un *axe* relativement à K et aux surfaces du second ordre, qui forment avec elles un système homofocal; en d'autres termes, les deux droites D et Δ sont perpendiculaires entre elles.

De ce que j'ai dit plus haut il résulte que, si l'on considère ξ, η, ζ comme des coordonnées courantes, la droite Δ est précisément déterminée par les équations (3), ou encore, si l'on pose, pour abréger,

$$(6) \qquad 2X = \alpha + A, \quad 2Y = \beta + B, \quad 2Z = \gamma + C,$$

par les suivantes :

$$(7) \qquad A\xi + a = B\eta + b = C\zeta + c = \lambda,$$

avec la relation

$$(8) \qquad G + \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = -\lambda.$$

3. Tirons de (7) les valeurs de ξ, η, ζ et portons-les dans (8), en égalant à zéro le terme constant et le coefficient de λ, il viendra

$$(9) \qquad \frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} + 1 = 0$$

et

$$(10) \qquad G = \frac{\alpha a}{A} + \frac{\beta b}{B} + \frac{\gamma c}{C}.$$

Soient x, y, z les coordonnées d'un quelconque des points où D rencontre la surface du second ordre K, le plan tangent en ce point contient Δ, et son équation est

$$\frac{x\xi}{a} + \frac{y\eta}{b} + \frac{z\zeta}{c} - 1 = 0.$$

Remplaçant, dans cette équation, ξ, η, ζ par leurs valeurs tirées de (7), il vient, en égalant à zéro, le terme constant et le coefficient de λ

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} + 1 = 0 \tag{11}$$

et

$$\frac{x}{aA} + \frac{y}{bB} + \frac{z}{cC} = 0. \tag{12}$$

L'équation (12) est celle du plan diamétral contenant la corde D; le plan, déterminé par l'équation (11), contient le point M en vertu de la relation (9); c'est donc le plan qui passe par les deux normales dont les pieds sont situés sur D; je le désignerai par P.

4. En général, pour abréger le discours, étant donné un plan quelconque ayant pour équation

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} + 1 = 0,$$

j'appellerai *centre* de ce plan le point dont les coordonnées sont p, q, r et *foyer* de ce plan le point où se coupent les deux normales à K qui sont contenues dans ce plan. On voit que le plan P, dont j'ai parlé plus haut, a pour foyer le point M et pour centre le point m dont les coordonnées sont A, B, C.

La notion de *centre d'un plan* se présente fréquemment dans la théorie des normales aux surfaces du second ordre, et, à ce sujet, je rappellerai une élégante proposition due à Joachimsthal :

Étant donnés, sur une surface du second ordre, trois points a, b, c, tels que les normales en ces points concourent en un même point M, *le pôle du plan abc, relativement à cette surface, est le centre, relativement aux trois axes de la surface, du plan qui passe par les* *pieds des trois autres normales que l'on peut encore abaisser du point* M (*).

5. En adoptant les dénominations qui précèdent, il résulte immédiatement des équations (6) que le centre N de la sphère S est le point milieu du segment M*m*.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Le centre de la sphère qui contient les pieds de quatre des normales que l'on peut abaisser, d'un point donné M, *sur une surface du second ordre* K, *est le milieu du segment qui joint le point* M *au centre du plan qui contient les deux autres normales.*

6. Pour déterminer complétement la sphère S, dont on peut construire le centre au moyen de la proposition précédente, il suffit de connaître la puissance G de l'origine relativement à cette sphère, ou bien encore de connaître la sphère Σ, dont l'équation est

$$x^2 + y^2 + z^2 + G = 0.$$

Cette sphère Σ peut être facilement déterminée en s'appuyant sur la propriété suivante :

Le point M *et le pôle du plan* P, *relativement à la surface du second ordre* K, *sont deux points conjugués relativement à la sphère* Σ, *en d'autres termes le plan polaire de chacun d'eux, relativement à* Σ, *contient l'autre point.*

Pour démontrer cette propriété, je remarque que le

(*) JOACHIMSTHAL, *De quibusdam æquationibus quarti et sexti gradus quæ in theoria linearum et superficierum secundi gradus occurrunt* (*Journal de Crelle*, t. LIII, p. 172).

pôle du plan P, relativement à K, a pour coordonnées

$$-\frac{a}{A};\quad -\frac{b}{B};\quad -\frac{c}{C};$$

le plan polaire de ce pôle, relativement à Σ, a pour équation

$$\frac{ax}{A}+\frac{by}{B}+\frac{cz}{C}-G=0,$$

et, en vertu de la relation (10), il contient évidemment le point α, β, γ; ce qui démontre la proposition énoncée.

7. La cubique gauche H rencontre la sphère S, d'abord aux quatre points où les normales concourent en M, puis en deux autres points. Je dirai, pour abréger, que la corde qui joint ces deux derniers points est la *corde supplémentaire* de D.

L'examen de l'équation (2) montre immédiatement que la corde supplémentaire est constamment comprise dans le plan

$$x\xi+y\eta+z\zeta+G=0,$$

où ξ, η, ζ désignent les coordonnées d'un point quelconque de Δ.

Remplaçons, dans l'équation précédente, ξ, η, ζ par leurs valeurs tirées de (7), et égalons à zéro le terme constant ainsi que le coefficient de λ; nous aurons les équations suivantes, qui définissent la corde supplémentaire :

$$\frac{ax}{A}+\frac{by}{B}+\frac{cz}{C}-G=0, \tag{13}$$

et

$$\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}=0. \tag{14}$$

L'équation (14) montre que le plan diamétral passant par la corde supplémentaire est parallèle au plan P. D'où la proposition suivante :

Les six pieds des normales, que l'on peut d'un point M *abaisser sur une surface du second ordre, sont, ainsi que le point* M *et le centre* O *de la surface, situés sur une même cubique gauche* H.

Si, par le point O, *on mène un plan parallèle au plan qui contient* M *et les pieds de deux quelconques des normales, ce plan coupe la cubique en deux autres points. Ces deux points et les pieds des quatre autres normales sont situés sur une même sphère.*

8. En désignant par ξ, η, ζ des constantes arbitraires, le pôle du plan

$$\frac{x\xi}{a}+\frac{y\eta}{b}+\frac{z\zeta}{c}-1,$$

relativement à K, est le point (ξ, η, ζ), dont le plan polaire, relativement à Σ, a pour équation

$$x\xi+y\eta+z\zeta+G=0,$$

Il résulte d'ailleurs de ce que j'ai dit plus haut que, si le plan

$$\frac{x\xi}{a}+\frac{y\eta}{b}+\frac{z\zeta}{c}-1=0,$$

tourne autour de la corde D, le plan

$$x\xi+y\eta+z\zeta+G=0$$

tourne autour de la corde supplémentaire.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

La droite Δ *et la corde supplémentaire de* D *sont polaires réciproques, relativement à la sphère* Σ.

9. Comme, dans la théorie des normales à une surface du second ordre, on a souvent à considérer les centres de divers plans (ces centres étant déterminés relativement aux axes de la surface), il n'est pas inutile d'entrer dans quelques détails relativement aux propriétés de ces points.

En premier lieu, soit, ρ désignant un paramètre variable,

$$(a+\rho a')x+(b+\rho b')y+(c+\rho c')z+d+\rho d'=0$$

l'équation d'un plan tournant d'une droite fixe.

Pour trouver le lieu décrit par le centre de ce plan, identifions son équation avec l'équation

$$\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}+1=0;$$

il viendra

$$A=\frac{d+\rho d'}{a+\rho a'},\quad B=\frac{d+\rho d'}{b+\rho b'},\quad C=\frac{d+\rho d'}{c+\rho c'},$$

d'où l'on voit que le centre décrit une cubique gauche passant par les sommets du tétraèdre Θ formé par les plans principaux et le plan à l'infini.

D'où les propositions suivantes :

Le lieu des centres des plans, qui passent par une droite fixe, est une cubique gauche passant par les sommets du tétraèdre Θ; et réciproquement:

Si une cubique gauche passe par les sommets du tétraèdre Θ, *les plans, dont ses divers points sont les centres, passent par une droite fixe.*

En second lieu, considérons une droite quelconque dont un des points soit déterminé par les équations

$$x=\frac{a+\rho a'}{d+\rho d'},\quad y=\frac{b+\rho b'}{d+\rho d'},\quad z=\frac{c+\rho c'}{d+\rho d'}.$$

Le plan ayant pour centre ce point a pour équation

$$\frac{x}{a+\rho a'}+\frac{y}{b+\rho b'}+\frac{z}{c+\rho c'}+\frac{1}{d+\rho d'}=0,$$

et il est clair que, quand on fait varier ρ, il enveloppe une cubique gauche ayant pour plans osculateurs les plans qui forment les faces du tétraèdre Θ.

D'où les propositions suivantes :

Les plans, qui ont pour centres les différents points d'une droite, enveloppent une cubique gauche inscrite dans le tétraèdre Θ (*); et réciproquement:

Si une cubique gauche est inscrite dans le tétraèdre Θ, *le lieu des centres de ses divers plans osculateurs est une ligne droite.*

Je m'appuierai maintenant sur le lemme qui suit :

Lemme. — *Si les sommets des deux tétraèdres sont situés sur une même cubique gauche, les huit faces de ces tétraèdres sont les plans osculateurs d'une autre cubique gauche.*

Réciproquement, *si les huit faces de deux tétraèdres sont les plans osculateurs d'une même cubique gauche, leurs huit sommets sont situés sur une autre cubique gauche.*

Il suffit évidemment de démontrer la première partie de ce lemme, la seconde proposition étant corrélative de la première.

Pour la démontrer, je remarque que la cubique, qui contient les sommets des deux tétraèdres, étant une *courbe unicursale,* je puis supposer que les sommets du

---

(*) J'entends par cubique gauche inscrite dans un tétraèdre une cubique ayant pour plans osculateurs les faces de ce tétraèdre.

premier tétraèdre soient déterminés par les racines d'une équation du quatrième degré $f(x) = 0$, et les sommets du second par les racines d'une équation de même degré $F(x) = 0$.

Cela posé, on voit que les racines de l'équation

$$F(x) + \lambda f(x) = 0,$$

où λ désigne un paramètre variable, déterminent sur la cubique les sommets d'une suite de tétraèdres, chaque point de la courbe étant d'ailleurs le sommet d'un seul de ces tétraèdres; d'où il résulte que les faces de tous ces tétraèdres enveloppent une cubique gauche, puisque, par chaque point de la courbe donnée, on ne peut mener que trois plans osculateurs à l'enveloppe.

En particulier, les faces des deux tétraèdres donnés sont des plans osculateurs de cette cubique gauche; la proposition est donc démontrée.

11. Considérons maintenant quatre plans dont les centres soient en ligne droite : d'après ce que j'ai démontré plus haut, les faces du tétraèdre T, déterminé par ces quatre plans, sont les plans osculateurs d'une cubique gauche inscrite dans le tétraèdre Θ. Du lemme précédent il résulte que les sommets des tétraèdres T et Θ sont situés sur une même cubique gauche et, par suite, les plans ayant pour centres les sommets du tétraèdre T passent par une même droite.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si les quatre faces d'un tétraèdre ont leurs centres en ligne droite, les plans qui ont pour centre les sommets du tétraèdre passent par une même droite.

Et de même :

Si les plans qui ont pour centres les sommets d'un *tétraèdre passent par une même droite, les centres des faces de ce tétraèdre sont en ligne droite.*

12. Si d'un point quelconque M de l'espace on mène les six normales à la surface du second ordre K, on sait que le point M et les six pieds des normales sont situés sur une même cubique gauche passant par les sommets du tétraèdre Θ. Désignons par $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_6$ les pieds de ces normales.

Des considérations qui précèdent il résulte immédiatement que:

Si l'on forme un tétraèdre ayant pour sommets quatre quelconques des sept points M, $p_1, p_2, \ldots, p_6$, *les centres des faces de ce tétraèdre sont en ligne droite.*

13. Considérons une droite quelconque E, normale à une surface de second ordre, ayant pour axes les axes de coordonnées Ox, Oy et Oz. Le lieu des centres des plans qui passent par E est une cubique gauche L passant par les sommets du tétraèdre Θ. Soit M un point quelconque pris sur cette normale; par ce point on peut mener à la surface cinq normales distinctes de E; soient p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5 leurs pieds. Désignons par N_1 le centre de la sphère qui passe par les quatre points p_2, p_3, p_4 et p_5, de même par N_2 le centre de la sphère qui passe par les quatre points p_1, p_3, p_4 et $p_5, \ldots$; désignons enfin par m_1, m_2, m_3, m_4 et m_5 les centres des plans qui, passant par E, contiennent respectivement les points p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5.

D'après ce que je viens de dire, les cinq points m sont situés sur la cubique gauche L; d'ailleurs, comme je l'ai montré précédemment (n° 5), les points N sont respectivement les milieux des segments Mm.

D'où l'on déduit immédiatement les propositions suivantes :

Si d'un point M *on mène cinq normales quelconques à une surface du second ordre, ayant pour centre* O, *les cinq pieds de ces normales peuvent être regardés comme les sommets de cinq tétraèdres; les centres des cinq sphères circonscrites à ces tétraèdres sont situés sur une cubique gauche, passant par le milieu du segment* MO *et par les points situés à l'infini sur les axes de la surface.*

Étant donnés une droite quelconque E *et trois droites rectangulaires* Ox, Oy *et* Oz, *imaginons toutes les surfaces du second ordre ayant ces droites pour axes et normales à* E; *si d'un point* M, *pris arbitrairement sur* E, *on mène à l'une de ces surfaces quatre normales distinctes de* E, *le lieu du centre de la sphère circonscrite au tétraèdre, formé par les pieds des normales, est une cubique gauche passant par le milieu du segment* MO, *et par les trois points à l'infini sur les axes* Ox, Oy *et* Oz.

Il est à remarquer que, si le point M se déplace sur la droite E, la cubique gauche conserve sa forme, chacun de ces points décrivant un segment de droite parallèle à E et égal à la moitié du segment, dont le point M s'est déplacé.

14. Je ne développerai pas davantage les conséquences qu'on peut déduire des propositions précédentes, et je terminerai cette Note en établissant quelques formules qui peuvent être utiles dans les recherches sur les normales aux surfaces du second ordre.

Soient ρ' et ρ'' les deux racines de l'équation (1) qui correspondent aux deux normales dont les pieds sont situés sur la droite D, et soit

$$F(\rho) = (\rho - \rho')(\rho - \rho'').$$

En désignant, pour un instant, par ρ l'une quelconque de ces racines, les coordonnées du pied correspondant sont

$$\frac{a\alpha}{a-\rho}, \quad \frac{b\beta}{b-\rho}, \quad \frac{c\gamma}{c-\rho},$$

l'équation du plan tangent en ce point

$$\frac{\xi\alpha}{a-\rho} + \frac{\eta\beta}{b-\rho} + \frac{\zeta\gamma}{c-\rho} = 1.$$

Ce plan contient la droite Δ; tirons de (7) les valeurs de ξ, η, ζ et portons ces valeurs dans l'équation précédente. En égalant à zéro le coefficient de λ, on obtiendra la relation

$$\frac{\alpha}{A(a-\rho)} + \frac{\beta}{B(b-\rho)} + \frac{\gamma}{C(c-\rho)} = 0,$$

et cette relation devant être satisfaite pour $\rho = \rho'$ et $\rho = \rho''$, il vient, après quelques réductions faciles,

$$F(\rho) = \rho^2 - (G + a + b + c)\rho - abc\left(\frac{\alpha}{aA} + \frac{\beta}{bB} + \frac{\gamma}{cC}\right);$$

d'où

$$(15) \qquad G = \rho' + \rho'' - a - b - c,$$

et

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} F(a) &= (c-a)(a-b)\frac{\alpha}{A} = (a-\rho')(a-\rho''), \\ F(b) &= (a-b)(b-c)\frac{\beta}{B} = (b-\rho')(b-\rho''), \\ F(c) &= (b-c)(c-a)\frac{\gamma}{C} = (c-\rho')(c-\rho''). \end{aligned} \right.$$

Puisque ρ'' satisfait à l'équation (1), on a identiquement

$$\frac{a\alpha^2(a-\rho')^2}{(a-\rho')^2(a-\rho'')^2}+\frac{b\beta^2(b-\rho')^2}{(b-\rho')^2(b-\rho'')^2}+\frac{c\gamma^2(c-\rho')^2}{(c-\rho')^2(c-\rho'')^2}=1;$$

d'où, en remplaçant les dénominateurs par leurs valeurs tirées de (16) et ρ' par ρ,

$$\frac{a\mathrm{A}^2}{(a-b)^2(c-a)^2}(a-\rho)^2+\frac{b\mathrm{B}^2}{(b-c)^2(a-b)^2}(b-\rho)^2+\frac{c\mathrm{C}^2}{(c-a)^2(b-c)^2}(c-\rho)^2-1=0.$$

Cette équation devant être satisfaite pour $\rho=\rho'$ et $\rho=\rho''$, on en déduit cette nouvelle expression du polynôme $\mathrm{F}(\rho)$,

$$\mathrm{F}(\rho)=\frac{\left[\begin{array}{l}a(b-c)^2\mathrm{A}^2(a-\rho)^2+b(c-a)^2\mathrm{B}^2(b-\rho)^2\\ \qquad+c(a-b)^2\mathrm{B}^2(c-\rho)^2-(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\end{array}\right]}{a(b-c)^2\mathrm{A}^2+b(c-a)^2\mathrm{B}^2+c(a-b)^2\mathrm{C}^2}.$$

D'où, en vertu des équations (16), les relations suivantes qui déterminent les coordonnées α, β, γ du foyer du plan :

$$\frac{x}{\mathrm{A}}+\frac{y}{\mathrm{B}}+\frac{z}{\mathrm{C}}+1=0,$$

$$(17)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{\alpha}{\mathrm{A}}&=\frac{(c-a)(a-b)[b\mathrm{B}^2+c\mathrm{C}^2-(b-c)^2]}{a(b-c)^2\mathrm{A}^2+b(c-a)^2\mathrm{B}^2+c(a-b^2)\mathrm{C}^2},\\ \frac{\beta}{\mathrm{B}}&=\frac{(a-b)(b-c)[c\mathrm{C}^2+a\mathrm{A}^2-(c-a)^2]}{a(b-c)^2\mathrm{A}^2+b(c-a)^2\mathrm{B}^2+c(a-b^2)\mathrm{C}^2},\\ \frac{\gamma}{\mathrm{C}}&=\frac{(b-c)(c-a)[a\mathrm{A}^2+b\mathrm{B}^2-(a-b)^2]}{a(b-c)^2\mathrm{A}^2+b(c-a)^2\mathrm{B}^2+c(a-b^2)\mathrm{C}^2};\end{aligned}\right.$$

et auxquelles on peut joindre la relation

$$(18)\quad G = \frac{\left[\begin{array}{r} a(a-b-c)(b-c)^2A^2 + b(b-c-a)(c-a)^2B^2 \\ + c(c-a-b)(a-b)^2C^2 \end{array}\right]}{a(b-c)^2A^2 + b(c-a)^2B^2 + c(a-b)^2C^2}.$$