NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. TISSOT

Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 145-163

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__145_0>

MÉMOIRE

SUR LA REPRÉSENTATION DES SURFACES ET LES PROJECTIONS DES CARTES GÉOGRAPHIQUES ;

PAR M. A. TISSOT.

[SUITE (1).]

CHAPITRE PREMIER.

Préliminaires.

1. Pour représenter une surface sur une autre, on imagine que chacune se trouve décomposée, par deux systèmes de lignes, en parallélogrammes infiniment petits, et, à chaque ligne de la première, on fait correspondre une des lignes de la seconde; alors, l'intersection de deux lignes de systèmes différents sur l'une, et l'intersection des deux lignes correspondantes sur l'autre, déterminent deux points correspondants; enfin l'ensemble des points de la seconde qui correspondent aux points d'une figure donnée de la première constitue la *représentation* ou la *projection* de cette figure. On obtient les divers modes de représentation en faisant varier les deux séries de lignes qui tracent le canevas sur l'une des surfaces.

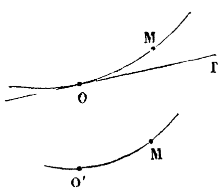
2. A moins que les deux surfaces ne soient applicables l'une sur l'autre, il est impossible de choisir un mode de projection tel qu'il y ait similitude entre toute figure tracée sur la première et la figure correspondante

(1) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVII, p. 49.

de la seconde. Au contraire, quelles que soient les deux surfaces, il existe une infinité de systèmes de projection conservant les angles, et tels, par conséquent, que chaque figure *infiniment petite* et sa représentation soient semblables entre elles. Il en existe une infinité d'autres conservant les aires. Néanmoins ces deux classes de systèmes constituent des exceptions : un mode de projection étant pris au hasard, il arrivera généralement que les angles se trouveront modifiés, si ce n'est en des points particuliers, et que les aires correspondantes n'auront pas entre elles un rapport constant.

Les longueurs seront aussi altérées. Considérons deux courbes qui se correspondent sur les deux surfaces;

Fig. 1.



soient O et M (*fig.* 1) deux points de l'une, O′ et M′ les points correspondants de l'autre, et OT la tangente en O à la première courbe. Si le point M se rapproche indéfiniment du point O, le point M′ se rapprochera indéfiniment du point O′, et le rapport de la longueur de l'arc O′M′ à celle de l'arc OM tendra vers une certaine limite : c'est cette limite que nous appellerons le *rapport de longueurs,* au point O, sur la courbe OM ou suivant la direction OT. Dans un système de projection conservant les angles, le rapport ainsi défini a la même valeur pour toutes les directions qui partent d'un même point, mais il varie avec la position de ce point, à moins que les deux surfaces ne soient applicables l'une sur l'autre. Lorsque la représentation ne conserve les angles qu'en des points particuliers, le rapport de longueurs en tout autre point change avec la direction.

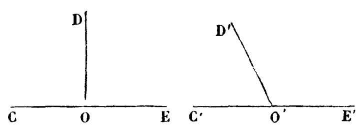
Loi de la déformation.

3. La déformation produite autour de chaque point est soumise à une loi qui ne dépend ni de la nature des surfaces ni du mode de projection :

Toute représentation d'une surface sur une autre peut être remplacée par une infinité de projections orthogonales faites chacune à une échelle convenable.

Remarquons d'abord qu'il existe toujours en chaque

Fig. 2.

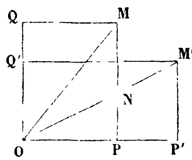


point de la première surface deux tangentes perpendiculaires l'une à l'autre, telles que les directions qui leur correspondent sur la seconde surface se coupent aussi à angle droit. Soient en effet CE et OD (*fig.* 2) deux droites perpendiculaires entre elles et tangentes en un point O à la première surface; soient C'E' et O'D' les tangentes correspondantes pour la seconde. Supposons que, des deux angles C'O'D, D'O'E', le premier soit aigu, et imaginons qu'un angle droit ayant son sommet en O tourne de gauche à droite, autour de ce point, dans le plan CDE, en partant de la position COD pour arriver à la position DOE. L'angle correspondant, dans le plan tangent en O' à la seconde surface, se confondra d'abord avec C'O'D', et sera aigu; en dernier lieu, il coïncidera avec D'O'E', et sera obtus; dans l'intervalle, il aura donc été droit. Ainsi il existe un système de deux tangentes satisfaisant à la condition énoncée ([1]).

De cette propriété on conclut que, dans tout mode de représentation, il y a, sur la première des deux surfaces, un système de deux séries de lignes orthogonales dont les projections sur la seconde sont aussi orthogonales. Les deux surfaces se trouvent ainsi décomposées en rectangles infiniment petits qui se correspondent de l'une à l'autre.

Cela posé, soit M (*fig.* 3) un point infiniment voisin de O, sur la première surface, et soit OPMQ celui d'entre les rectangles infiniment petits dont nous venons de par-

Fig. 3.



ler, qui a pour diagonale OM. Déplaçons la seconde surface, et donnons-lui une position telle que les projections des côtés OP, OQ tombent sur ces côtés eux-mêmes, prolongés s'il est nécessaire; soit alors O'P'M'Q' le rectangle correspondant à OPMQ; appelons N le point de rencontre des droites OM' et PM. On peut considérer ce point comme la projection orthogonale de la position que prendrait M si l'on faisait tourner d'un angle conve-

([1]) La démonstration suppose que la représentation n'altère pas la continuité et qu'à deux directions de sens contraires partant du point considéré sur l'une des surfaces correspondent, sur l'autre, deux directions aussi de sens contraires. Il peut donc y avoir exception à la loi de la déformation en certains points particuliers; par exemple, il en sera ainsi aux pôles terrestres quand les angles des méridiens de la carte seront proportionnels à ceux des méridiens du globe sans leur être égaux.

nable, autour de OP, le plan du rectangle OPMQ. Or cet angle, qui ne dépend que du rapport des deux lignes NP, MP, est le même quel que soit M; car, en désignant respectivement par a et b les rapports de longueurs suivant les directions OP et OQ, c'est-à-dire en posant $\frac{OP'}{OP} = a$, $\frac{OQ'}{OQ} = b$, nous aurons

$$\frac{NP}{M'P'} = \frac{OP}{OP'} = \frac{1}{a}, \quad \frac{MP}{M'P'} = \frac{OQ}{OQ'} = \frac{1}{b},$$

et, par conséquent,

$$\frac{NP}{MP} = \frac{b}{a}.$$

Ainsi déjà, M se déplaçant sur une figure infiniment petite tracée autour du point O, on obtiendra le lieu décrit par N, en faisant tourner cette figure d'un certain angle autour de OP, puis en la projetant orthogonalement sur le plan tangent en O. D'autre part, on a

$$\frac{OM'}{ON} = \frac{OP'}{OP} = a,$$

de sorte que le lieu des points M' est homothétique de celui des points N; le centre d'homothétie est O, et le rapport d'homothétie a pour valeur a. La représentation de la figure infiniment petite décrite par le point M est donc bien une projection orthogonale de cette figure faite à une échelle convenable ([1]).

([1]) M. Chasles (Mémoire faisant suite à l'*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie*) distingue, dans les figures homographiques, les relations descriptives et les relations métriques. « Les relations descriptives consistent en ce que a chaque point et à chaque plan de l'une des figures correspondent, dans l'autre, un point et un plan respectivement. Les relations métriques consistent en ce que quatre points en ligne droite, dans la seconde figure, ont

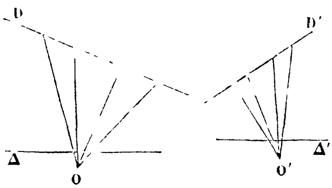
Une carte géographique quelconque, par exemple, peut être considérée comme produite par la juxtaposition des projections orthogonales de tous les éléments

---

leur rapport anharmonique égal à celui des quatre points de la première figure auxquels ils correspondent. » L'illustre géomètre ajoute d'ailleurs : « Ces relations métriques sont une conséquence des relations descriptives. » Nous allons faire voir que cela résulte immédiatement de la loi que subit la déformation dans la représentation d'une surface sur une autre.

Soient D, D′ (*fig.* 4) deux droites qui se correspondent dans deux figures homographiques; il s'agit de prouver que le rapport anharmonique de quatre points quelconques de D et celui des quatre points correspondants de D′ sont égaux. Pour cela, prenons, en dehors des deux droites, deux points correspondants O et O′ dans les deux figures; joignons le premier aux quatre points de D, le second aux quatre points de D′; puis coupons respectivement les deux faisceaux ainsi obtenus

Fig. 4.



par deux transversales Δ, Δ′, infiniment rapprochées l'une de O, l'autre de O′. D'après la loi invoquée plus haut, la figure infiniment petite formée par la portion du faisceau comprise entre O′ et Δ′ peut s'obtenir en projetant orthogonalement la figure correspondante formée autour du point O, puis en modifiant, dans un rapport convenable, les dimensions de la projection ainsi obtenue. Aucune de ces deux opérations n'altère le rapport anharmonique des quatre points de Δ; or celui-ci est le même que celui des quatre points de D; celui des quatre points de Δ′ est le même que celui des quatre points de D′; donc le rapport anharmonique des quatre points de D et celui des quatre points de D′ sont égaux.

En résumé, il s'agissait de faire voir que, dans deux figures homographiques, deux faisceaux de droites correspondantes sont homographiques; or c'est ce qui a lieu, puisque, d'après la loi de déformation, l'un est une projection orthogonale de l'autre.

superficiels de la contrée, pourvu que l'on fasse varier de l'un à l'autre, et l'échelle de réduction et la position de l'élément par rapport au plan de la carte.

Tangentes principales.

4. De tous les angles droits qui sont formés par des tangentes issues du point O (*fig.* 3), ceux des lignes OP, OQ et de leurs prolongements sont les seuls dont un côté reste parallèle au plan tangent après la rotation qui a été indiquée tout à l'heure; ce sont donc aussi les seuls qui se projettent suivant des angles droits. Nous pouvons d'après cela compléter le lemme qui a été établi au commencement du troisième paragraphe et énoncer la propriété suivante :

En chaque point de la surface que l'on veut représenter, il y a deux tangentes perpendiculaires entre elles, et, si les angles ne sont pas conservés, il n'y en a que deux, telles que celles qui leur correspondent sur l'autre surface se coupent aussi à angle droit. De sorte que, *sur chacune des deux surfaces, il existe un système de trajectoires orthogonales, et, si le mode de représentation ne conserve pas les angles, il en existe un seul dont les projections sur l'autre surface sont aussi orthogonales.*

Nous appellerons *première* et *seconde tangente principale* les deux tangentes perpendiculaires entre elles dont l'angle n'est pas altéré par la représentation. Nous continuerons à désigner respectivement par a et b les rapports de longueurs suivant les directions de ces tangentes, et nous supposerons que a est le plus grand des deux.

Ellipse indicatrice.

5. Si la courbe infiniment petite tracée autour du point O est une circonférence dont il occupe le centre, la représentation de cette courbe sera une ellipse dont les axes se trouveront sur les tangentes principales et auront pour demi-longueurs a et b, le rayon de la circonférence étant pris pour unité. Cette ellipse constitue en chaque point une sorte d'*indicatrice* du système de projection [1].

---

[1] Imaginons que l'on effectue deux décompositions de l'espace en parallélépipèdes infiniment petits, chacune au moyen de trois séries de surfaces, et faisons correspondre les surfaces qui opèrent l'une respectivement à celles qui opèrent l'autre. Dans la représentation ainsi obtenue, la loi de la déformation sera la suivante :

Toute sphère infiniment petite est remplacée par un ellipsoïde.

Soient en effet O et O' deux points correspondants, M un point infiniment voisin de O, M' la projection de M. Considérons trois axes ox, oy, oz perpendiculaires entre eux et les directions correspondantes $o'x'$, $o'y'$, $o'z'$; soient x, y, z les coordonnées de M par rapport à ox, oy, oz ; soient x', y', z' celles de M' par rapport à $o'x'$, $o'y'$, $o'z'$. Prenons la distance OM pour unité, et appelons g, h, k les rapports de longueurs, suivant ox, oy, oz ; nous aurons

$$x' = g x, \quad y' = h y, \quad y' = k z.$$

D'ailleurs l'équation de la sphère qui a pour centre le point O et pour rayon OM est

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Le lieu des projections des divers points de cette sphère sera donc fourni par l'équation

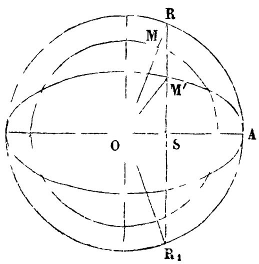
$$\frac{x'^2}{g^2} + \frac{y'^2}{h^2} + \frac{z'^2}{k^2} = 1,$$

qui représente un ellipsoïde rapporté à trois diamètres conjugués.

Les plans principaux et les axes de l'ellipsoïde fourniront ici des propriétés analogues à celles des tangentes principales dans la représentation d'une surface sur une autre, et il serait facile d'établir les formules nécessaires à l'étude de la déformation autour de chaque point.

Au lieu de projeter orthogonalement la circonférence lieu des points M (*fig.* 3), ce qui donne l'ellipse lieu des points N, puis d'agrandir celle-ci dans le rapport de a à l'unité, ce qui donne le lieu des points M', on peut effectuer les deux opérations dans l'ordre inverse. On obtiendra donc le point M' (*fig.* 5) de l'ellipse indicatrice qui correspond à un point donné M du cercle, en prolongeant le rayon OM jusqu'à sa rencontre en R avec la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre, en abaissant du point d'intersection R une perpendiculaire RS sur la direction OA du grand axe, puis réduisant cette perpendiculaire, à partir de son

Fig. 5.



pied S, dans le rapport de b à a; l'extrémité M' de la portion SM' ainsi obtenue sera le point cherché.

Altérations d'angles.

6. Tirons OM' (*fig.* 5), et appelons respectivement u, u' les angles AOM, AOM' qui se correspondent sur les deux surfaces. Comme le second est le plus petit des deux, on voit que la représentation diminue tous les angles aigus dont l'un des côtés coïncide avec la première tangente principale. Entre u et u', on a d'ailleurs

la relation

$$\operatorname{tang} u' = \frac{b}{a} \operatorname{tang} u.$$

7. Prolongeons la ligne RS d'une longueur égale à elle-même au-dessous de OA, et joignons le point O à l'extrémité R_1 du prolongement. Les deux triangles ORM', OR_1M' donnent

$$\sin(u - u') = \frac{a-b}{a+b} \sin(u + u').$$

L'angle u augmentant de zéro à $\frac{\pi}{2}$, son altération $u - u'$ augmente de zéro jusqu'à une certaine valeur ω, puis diminue jusqu'à zéro. Le *maximum* se produit au moment où la somme $u + u'$ devient égale à $\frac{\pi}{2}$. Soient U et U' les valeurs correspondantes de u et de u'; comme elles doivent satisfaire à l'équation du n° 6, on aura

$$\operatorname{tang} U = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \operatorname{tang} U' = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Quant à ω, on peut le calculer par l'une des formules

$$\sin\omega = \frac{a-b}{a+b}, \quad \cos\omega = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b},$$

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}, \quad \operatorname{tang}\frac{\omega}{2} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},$$

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{b}{a}},$$

dont les deux dernières proviennent de ce que, la somme de U et de U' étant égale à $\frac{\pi}{2}$ et leur différence à ω, on a

$$U = \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}, \quad U' = \frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}.$$

8. Pour que l'équation du n° 6 reste satisfaite quand on y change u en $\frac{\pi}{2} - u'$, il suffit d'y remplacer u' par $\frac{\pi}{2} - u$. Les mêmes substitutions, effectuées dans $u + u'$, donnent pour résultat $\pi - (u + u')$, de sorte que la première formule du n° 7 fait retomber sur la même valeur de l'altération. Ainsi, des deux angles qui se trouvent modifiés de quantités égales, chacun est le complément de la projection de l'autre.

9. Si l'on veut calculer directement l'altération éprouvée par l'angle donné u, on se servira de l'une des deux formules

$$\operatorname{tang}(u - u') = \frac{(a - b)\operatorname{tang} u}{a + b \operatorname{tang}^2 u},$$

$$\operatorname{tang}(u - u') = \frac{(a - b)\sin 2u}{a + b + (a - b)\cos 2u},$$

qui se déduisent immédiatement de l'équation du n° 6.

10. Considérons maintenant un angle MON (*fig.* 6 et 7) qui n'ait pour côtés ni l'une ni l'autre des tan-

Fig. 6.

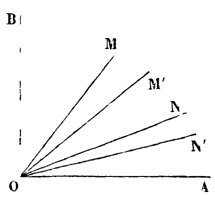
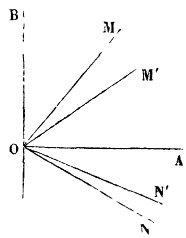


Fig. 7.



gentes principales OA, OB. Nous pouvons supposer les deux directions OM, ON à droite de OB, et l'une d'elles OM au-dessus de OA. Suivant que l'autre, ON, sera au-dessus de OA (*fig.* 6), ou au-dessous (*fig.* 7), on calculera l'angle correspondant M'ON' en faisant la somme ou la différence des angles AOM', AON', lesquels seront donnés par la formule du n° 6. L'altération MON — M'ON' sera aussi, dans le premier cas, la différence, et, dans le second, la somme des altérations éprouvées par les angles AOM, AON.

11. Quand l'angle AON (*fig.* 6) est égal à BOM', on sait que son altération est la même que celle de l'angle AOM, de sorte que l'angle MON se trouve alors reproduit en vraie grandeur par l'angle M'ON'. Ainsi, à toute direction donnée, on peut en accoupler une autre, et une seule, telle que leur angle se conserve en projection. Cependant la seconde direction se confond avec la première lorsque celle-ci fait avec OA l'angle que nous avons désigné par U.

12. L'angle le plus altéré est celui que forme cette dernière direction avec sa symétrique par rapport à OA; il se trouve remplacé, sur la projection, par son supplément. Le *maximum* d'altération ainsi produit est égal à 2ω. Il ne peut jamais se rapporter à deux directions perpendiculaires entre elles.

Altérations de longueurs.

13. La longueur OM (*fig.* 5) ayant été prise pour unité, le rapport de longueurs suivant la direction OM est mesuré par OM'. Désignons par r ce rapport; nous pourrons le calculer au moyen de l'une des formules

$$r\cos u' = a\cos u,\quad r\sin u' = b\sin u,\quad r^2 = a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u.$$

On a aussi, entre r, u et l'altération $u - u'$ de l'angle u, la relation

$$2r\sin(u - u') = (a - b)\sin 2u,$$

qui exprime que, dans le triangle ORM′, les sinus de deux des angles sont entre eux comme les côtés opposés.

14. Le *maximum* et le *minimum* de r correspondent aux tangentes principales, et sont respectivement a et b.

15. Appelons r et r_1 les rapports de longueurs suivant deux directions perpendiculaires entre elles, et soit θ l'altération qu'éprouve l'angle droit formé par ces deux directions. Il est facile de voir que l'on aura

$$r^2 + r_1^2 = a^2 + b^2, \quad rr_1 \cos\theta = ab,$$

ainsi que cela résulte d'ailleurs des propriétés des diamètres conjugués dans l'ellipse.

16. Pour tous les angles non modifiés par la représentation, le produit des rapports de longueurs suivant leurs côtés est le même.

En effet, soient OA (*fig.* 6) et OB les deux tangentes principales; soient MON un angle quelconque et M′ON′ sa projection. Désignons respectivement par r et r_2 les rapports de longueurs suivant OM et ON, par u et u' les angles AOM et AOM′, il viendra

$$r \cos u' = a \cos u, \quad r_2 \sin \mathrm{AON}' = b \sin \mathrm{AON};$$

mais on sait que, si l'altération MON — M′ON′ est nulle, l'angle AON est le complément de u', et l'angle AON′ celui de u, de sorte que la seconde équation donne

$$r_2 \cos u = b \cos u'.$$

En multipliant celle-ci et la première membre à membre, on obtient

$$rr_2 = ab,$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

17. Il résulte de cette propriété que les rapports de longueurs suivant les deux directions dont l'angle subit l'altération *maxima* est égal à $\sqrt{ab}$; car l'angle non altéré qui a pour côté l'une de ces deux lignes se réduit à zéro, et a la même ligne pour second côté (n° 11).

Altérations de surfaces.

18. Le rapport dans lequel un élément superficiel se trouve modifié par la représentation n'est autre que celui du rectangle OP'M'Q' (*fig.* 3) au rectangle OPMQ, ou encore celui de l'aire de l'ellipse indicatrice à l'aire du cercle; il est donc égal à *ab*.

19. Lorsque les deux aires sont équivalentes, on a

$$b = \frac{1}{a}, \quad \tan\omega = \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right),$$

$$\tan\frac{\omega}{2} = \frac{a-1}{a+1}, \quad \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right) = a.$$

Les deux éléments linéaires dont l'angle est le plus altéré conservent alors leurs longueurs.

Détermination des axes de l'ellipse indicatrice.

20. Pour appliquer les formules ci-dessus à l'étude de la déformation produite autour de chaque point par un mode de projection suffisamment défini, il faut au préalable déterminer les longueurs et les directions des axes de l'ellipse indicatrice.

Supposons les deux surfaces rapportées à un même système ou à deux systèmes d'axes perpendiculaires entre eux; soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de l'une, x', y', z' celles du point correspondant de l'autre, l et m deux paramètres variables.

On peut définir le mode de représentation en égalant les six coordonnées à des fonctions convenablement choisies de l et de m. Pour chaque couple de valeurs attribuées aux deux paramètres, on obtiendra un point de la première surface et la projection de ce point. Pour chaque valeur attribuée à un seul des paramètres, l'autre restant variable, on obtiendra une courbe du premier canevas et la courbe correspondante du second. Si l'on pose

$$\mathrm{L} = \left[\left(\frac{dx}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dl}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathrm{L}' = \left[\left(\frac{dx'}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dl}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathrm{M} = \left[\left(\frac{dx}{dm}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dm}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dm}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathrm{M}' = \left[\left(\frac{dx'}{dm}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dm}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dm}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

les longueurs des côtés de deux parallélogrammes infiniment petits se correspondant sur les deux canevas seront, pour l'un, $\mathrm{L}\,dl$ et $\mathrm{M}\,dm$, pour l'autre, $\mathrm{L}'dl$ et $\mathrm{M}'dm$. En appelant h et k les rapports de ces côtés, Θ et Θ' leurs angles, on aura

$$h = \frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}}, \quad k = \frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{M}},$$

$$\cos\Theta = \frac{1}{\mathrm{LM}}\left[\left(\frac{dx}{dl}\right)\left(\frac{dx}{dm}\right) + \left(\frac{dy}{dl}\right)\left(\frac{dy}{dm}\right) + \left(\frac{dz}{dl}\right)\left(\frac{dz}{dm}\right)\right],$$

$$\cos\Theta' = \frac{1}{\mathrm{L}'\mathrm{M}'}\left[\left(\frac{dx'}{dl}\right)\left(\frac{dx'}{dm}\right) + \left(\frac{dy'}{dl}\right)\left(\frac{dy'}{dm}\right) + \left(\frac{dz'}{dl}\right)\left(\frac{dz'}{dm}\right)\right],$$

de sorte que h, k, Θ et Θ' sont connus en fonction de l et de m.

Dans un grand nombre d'applications, notamment dans celles qui auront pour objet les cartes géographiques, il sera inutile d'exprimer les six coordonnées rectangulaires en fonction de l et de m, et la nature des surfaces ainsi que celle du mode de projection permettront de remplacer les formules qui précèdent par d'autres plus simples. En tout cas, nous pouvons maintenant considérer comme donnés, pour chaque point de la première surface, les deux angles adjacents supplémentaires, Θ, $\pi - \Theta$, de deux éléments linéaires, leurs projections, Θ', $\pi - \Theta'$, et les rapports de longueurs, h, k, suivant les directions de ces éléments.

21. Des deux angles donnés, l'un est traversé par la première tangente principale; nous verrons plus loin comment on peut le distinguer de l'autre; c'est lui que nous désignerons par Θ; appelons u et v les deux parties dans lesquelles il se trouve ainsi décomposé, u étant celle des deux qui est formée par la tangente principale et la direction suivant laquelle le rapport de longueurs est h; soient u' et v' les portions correspondantes de Θ'. Si, pour fixer les idées, nous supposons $h > k$, l'angle u sera nécessairement aigu et même plus petit que v et que $\pi - v$; quant à v, il pourra être aigu ou obtus. D'après les formules du n° 12, on a

$$u + v = \Theta, \quad a\cos u = h\cos u', \quad a\cos v = k\cos v',$$
$$u' + v' = \Theta', \quad b\sin u = h\sin u', \quad b\sin v = k\sin v';$$

d'où l'on déduit

$$ab\sin\Theta = hk\sin\Theta',$$
$$(a^2 + b^2)\sin^2\Theta = h^2 + k^2 - 2hk\cos\Theta\cos\Theta',$$

ou bien encore

$$(a + b)^2\sin^2\Theta = h^2 + k^2 - 2hk\cos(\Theta + \Theta'),$$
$$(a - b)^2\sin^2\Theta = h^2 + k^2 - 2hk\cos(\Theta - \Theta').$$

Ces équations ne changent pas lorsqu'on y remplace à la fois Θ par $\pi - \Theta$, et Θ' par $\pi - \Theta'$; elles fourniront donc a et b sans qu'il soit besoin de savoir quel est celui des deux angles donnés à l'intérieur duquel passe la première tangente principale. Il vient ensuite, pour le calcul de u et de v,

$$\sin u = \sqrt{\frac{a^2 - h^2}{a^2 - b^2}}, \qquad \sin v = \sqrt{\frac{a^2 - k^2}{a^2 - b^2}},$$

$$\cos u = \sqrt{\frac{h^2 - b^2}{a^2 - b^2}}, \qquad \cos v = \pm\sqrt{\frac{k^2 - b^2}{a^2 - b^2}},$$

$$\operatorname{tang} u = \sqrt{\frac{a^2 - h^2}{h^2 - b^2}}, \qquad \operatorname{tang} v = \pm\sqrt{\frac{a^2 - k^2}{k^2 - b^2}}.$$

Pour déterminer complétement la direction de la première tangente principale, il reste encore à choisir, relativement à Θ, entre deux angles supplémentaires donnés, et, relativement à v, entre deux valeurs supplémentaires fournies par les trois dernières formules. On lèvera immédiatement toute indécision en cherchant quelle est celle de ces deux valeurs qui, ajoutée à u, produit une somme égale à l'un des deux angles donnés; en effet, l'équation $u + v = \Theta$ est incompatible avec chacune de celles que l'on formerait en y remplaçant soit Θ par $\pi - \Theta$, soit v par $\pi - v$, soit en même temps Θ par $\pi - \Theta$ et v par $\pi - v$, à moins cependant que l'on n'ait $\Theta = \frac{\pi}{2}$, ou $v = \frac{\pi}{2}$, ou $u = 0$; mais ces trois cas particuliers, qui ne comportent d'ailleurs aucune incertitude, se trouvent parmi ceux que nous allons examiner. Remarquons encore que, si v est obtus, Θ sera à plus forte raison obtus, et que, si v est aigu, Θ sera aigu ou obtus, suivant que $a^2 + b^2$ se trouvera plus petit ou plus grand que $h^2 + k^2$.

22. Lorsque les deux angles supplémentaires qui sont donnés sur la première surface n'éprouvent pas d'altération, c'est-à-dire pour $\Theta' = \Theta$, les équations qui fournissent les demi-axes de l'ellipse indicatrice se réduisent à

$$ab = hk, \quad (a - b)\sin\Theta = h - k.$$

Lorsque les mêmes angles se changent l'un dans l'autre par l'effet de la représentation, c'est-à-dire pour $\Theta' = \pi - \Theta$, les équations deviennent

$$ab = hk, \quad (a + b)\sin\Theta = h + k.$$

Quand les angles sont droits, c'est-à-dire pour $\Theta = \frac{\pi}{2}$, les formules générales se ramènent à celles qui expriment les propriétés des diamètres conjugués dans l'ellipse indicatrice. Alors u et v sont complémentaires, et la première tangente principale se dirige à l'intérieur de celui des deux angles droits donnés qui a pour projection un angle aigu.

Quand les rapports de longueurs suivant les directions des deux éléments linéaires sont égaux, c'est-à-dire pour $h = k$, on a

$$a = h\,\frac{\cos\frac{\Theta'}{2}}{\cos\frac{\Theta}{2}}, \quad b = h\,\frac{\sin\frac{\Theta'}{2}}{\sin\frac{\Theta}{2}};$$

la première tangente principale est bissectrice de celui des deux angles donnés qui se trouve diminué en projection.

Si les mêmes rapports sont liés à Θ et à Θ' par la relation

$$h\cos\Theta = k\cos\Theta',$$

il viendra

$$a = h, \quad b = k\,\frac{\sin\Theta'}{\sin\Theta},$$

et la première tangente principale coïncidera avec la direction suivant laquelle le rapport de longueur est h.

Si les données satisfont à la condition

$$h \cos\Theta' = k \cos\Theta,$$

il viendra

$$a = h \frac{\sin\Theta'}{\sin\Theta}, \quad b = k,$$

et la première tangente principale sera perpendiculaire à la direction suivant laquelle le rapport des longueurs est k.

(*A suivre.*)