NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. COURBE

Question de licence (novembre 1875)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 113-115

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__113_1>

QUESTION DE LICENCE (NOVEMBRE 1875);

PAR M. H. COURBE,
Professeur au lycée de Fribourg (Suisse).

Déterminer toutes les surfaces qui satisfont à la condition

$$\mathrm{OP}.\mathrm{MN} = \lambda\,\overline{\mathrm{OM}}^2,$$

dans laquelle λ *désigne une constante donnée,* O *l'origine des coordonnées,* M *un point quelconque de l'une des surfaces,* P *le pied de la perpendiculaire abaissée de* O *sur le plan tangent en* M, *et* N *la trace de la normale sur le plan des* xy.

Soient x, y, z les coordonnées du point M; X, Y, Z les coordonnées courantes; l'équation du plan tangent en M sera

$$\mathrm{Z} - z = p(\mathrm{X} - x) + q(\mathrm{Y} - y),$$

en posant, pour simplifier,

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q.$$

La normale au point M a pour équations

$$(X - x) + p(Z - z) = 0,$$
$$(Y - y) + q(Z - z) = 0.$$

La distance OP de l'origine au plan tangent a pour expression

$$OP = \frac{z - px - qy}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}.$$

La trace N de la normale sur le plan des xy ayant pour coordonnées

$$Z = 0, \quad X = x + pz, \quad Y = y + qz,$$

la longueur MN a pour expression

$$MN = z\sqrt{p^2 + q^2 + 1}.$$

Enfin, comme on a

$$\overline{OM}^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

l'équation de condition peut s'écrire

$$z(z - px - qy) = \lambda(x^2 + y^2 + z^2),$$

ou

$$z - \frac{dz}{dx}x - \frac{dz}{dy}y = \lambda\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z};$$

telle est l'équation différentielle des surfaces cherchées.

On a donc à intégrer les équations simultanées

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{z\,dz}{z^2 - \lambda(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

La première donne

$$\frac{y}{x} = \mathrm{C}.$$

La seconde peut alors s'écrire

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z^2 - \lambda[(1 + \mathrm{C}^2)x^2 + z^2]}{zx}.$$

En désignant par t une variable auxiliaire, et en posant

$$z = tx, \quad \text{d'où} \quad \frac{dz}{dx} = x\frac{dt}{dx} + t,$$

elle devient

$$x\frac{dt}{dx} = -\frac{\lambda(1 + \mathrm{C}^2 + t^2)}{t} \quad \text{ou} \quad -\lambda\frac{dx}{x} = \frac{t\,dt}{1 + \mathrm{C}^2 + t^2},$$

et, en intégrant,

$$\log(1 + \mathrm{C}^2 + t^2)^{\frac{1}{2}} + \log x^\lambda = \text{const.}$$

Remplaçons t par $\frac{z}{x}$, C par $\frac{y}{x}$, et passons aux fonctions inverses, nous aurons

$$x^{\lambda-1}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{C}'.$$

En faisant $\mathrm{C}' = \varphi(\mathrm{C})$, φ désignant une fonction arbitraire, on a, pour représenter toutes les surfaces cherchées, l'équation

$$x^{\lambda-1}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$
