J. GRIESS

Question de licence (1866)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 111-113

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__111_0>

QUESTION DE LICENCE (1866);

PAR M. J. GRIESS,
à Zurich.

Trouver une courbe plane telle que la projection de son rayon de courbure sur une droite fixe située dans son plan ait une longueur constante.

La longueur du rayon de courbure est

$$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Le cosinus de l'angle du rayon de courbure avec la droite est égal au sinus de l'angle de la tangente avec la même droite. Si elle est prise comme axe des x, et que ω désigne ce dernier angle, on a

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{dy}{dx};$$

donc

$$\sin\omega = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}},$$

donc la projection du rayon de courbure sera

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \frac{\frac{dy}{dx}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

donc l'équation différentielle de la courbe sera

$$\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\frac{dy}{dx}=a, \quad a\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right].$$

Pour intégrer cette équation, je pose

$$\frac{dy}{dx}=p, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx};$$

donc on a

$$a\frac{dp}{dx}=p(1+p^2).$$

Posons

$$p=\operatorname{tang}\omega,$$

on a

$$\frac{dp}{dx}=\frac{1}{\cos^2\omega}\frac{d\omega}{dx},$$

et il vient

$$a\frac{1}{\cos^2\omega}\frac{d\omega}{dx}=\operatorname{tang}\omega\frac{1}{\cos^2\omega},$$

$$a\frac{d\omega}{\operatorname{tang}\omega}=dx=a\frac{\cos\omega\,d\omega}{\sin\omega}=a\frac{d\sin\omega}{\sin\omega},$$

donc

$$\frac{x}{a}=l\sin\omega, \quad \sin\omega=e^{\frac{x}{a}};$$

on a maintenant

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tang}\omega, \quad dy=\operatorname{tang}\omega\,dx,$$

$$dy=\operatorname{tang}\omega\frac{a\,d\omega}{\operatorname{tang}\omega}=a\,d\omega, \quad y=a\omega.$$

Éliminant ω, on a

$$\frac{y}{a}=\arcsin\left(e^{\frac{x}{a}}\right).$$

Cette équation représente une série de courbes, tangentes à l'axe des y en des points dont les ordonnées sont

$$a\frac{\pi}{2},\quad a\frac{5\pi}{2},\quad a\frac{9\pi}{2},\quad \ldots;$$

ces différentes courbes sont comprises entre des droites

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = a\pi,\quad x = 2a\pi \quad \text{et} \quad x = 3a\pi,$$
$$x = 2na\pi \quad \text{et} \quad x = (2n+1)a\pi,$$

et elles ont en même temps ces différentes droites pour asymptotes. Elles sont toutes étendues vers le côté des x négatifs.