H. RESAL

Solution élémentaire du problème général des brachistochrones

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 16 (1877), p. 97-104
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__97_0>

SOLUTION ÉLÉMENTAIRE DU PROBLÈME GÉNÉRAL DES BRACHISTOCHRONES;

PAR M. H. RESAL,
Membre de l'Institut.

1. Un professeur est quelquefois obligé, par la force des choses, de traiter géométriquement des questions de Mécanique qui devraient faire partie du domaine du calcul des variations. C'est ce qui explique l'objet de cette Note, dans laquelle j'ai cherché à établir directement les principales propriétés des brachistochrones considérées à un point de vue général (*).

Nous supposerons que le point matériel m, qui doit parcourir la courbe du plus rapide trajet de A en B, est sollicité par une force qui dérive d'un potentiel.

1° *Le point n'est pas assujetti à rester sur une surface.*

2. Par un raisonnement très-simple, on arrive facilement à établir le principe suivant :

Si le mobile m est arrivé avec une certaine vitesse en un point a de la brachistochrone, il mettra moins de temps pour parvenir en un autre point b de cette courbe qu'en suivant l'arc de toute autre courbe limite en a et b; d'où l'on conclut :

Deux éléments consécutifs de la brachistochrone jouissent de la propriété d'être parcourus dans un temps minimum.

(*) *Voir* à ce sujet un excellent Mémoire basé sur le calcul des variations, publié par M. Roger, dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XIII, 1re série.

3. *Le plan osculateur en chaque point de la brachistochrone est normal à la surface de niveau correspondante.*

Soient, en effet, mn, nm' deux éléments consécutifs d'une courbe déterminant un plan normal à la surface de niveau (s) passant par n; n' un point de (s) infiniment voisin de n situé sur la normale en ce dernier point au plan mnm'; V, V' les vitesses que posséderait le point mobile m en parcourant mn ou mn' et nm' ou $n'm'$; on a

$$mn < nm', \quad mn' < n'm',$$

d'où

$$\frac{mn}{V} + \frac{nm'}{V'} < \frac{mn'}{V} + \frac{n'm'}{V'},$$

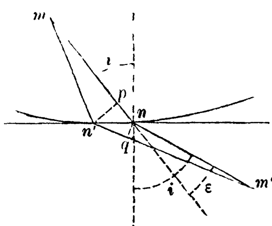
ce qui démontre le théorème énoncé.

Corollaire. — *Si les surfaces de niveau sont des plans parallèles ou des sphères concentriques, la brachistochrone est plane.*

4. *La composante de la force extérieure suivant la normale principale de la brachistochrone est égale à la force centripète.* (Théorème d'Euler.)

Soient (*fig.* 1) mn, nm' deux éléments consécutifs

Fig. 1.



de la courbe; n' un point infiniment voisin de n situé sur la même surface de niveau et dans le plan mnm'; p, q

les projections de n' et n sur mn et $n'm'$; i, i' les angles formés par mn, nm' avec la normale à la surface ci-dessus. Les temps employés pour aller de m en m' en passant par n et n' sont respectivement

$$\frac{mn}{V} + \frac{nm'}{V'} = \frac{mn' + np}{V} + \frac{n'm' - n'q}{V'},$$

$$\frac{mn'}{V} = \frac{n'm'}{V'};$$

La condition relative au minimum du temps employé pour aller de m en m' en passant par n s'exprimera en égalant à zéro la différence de ces deux quantités, d'où

$$\frac{np}{V} = \frac{n'q}{V'};$$

or on a

$$np = nn' \sin i, \quad n'q = nn' \sin i',$$

par suite

$$\frac{\sin i}{V} = \frac{\sin i'}{V'}.$$

Si ε est l'angle de contingence de la courbe, on a

$$i' = i + \varepsilon, \quad V' = V + dV,$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{dV}{dt} = V \cot i \frac{\varepsilon}{dt} = V \cot i \frac{\varepsilon}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{V^2}{\rho} \cot i,$$

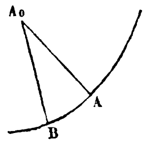
ds étant l'élément de chemin et ρ le rayon de courbure.

Telle est l'expression de la composante tangentielle de la force extérieure F lorsque l'on considère la masse du mobile comme égale à l'unité. Comme cette force est normale à nn', sa composante suivant le rayon de courbure est $\frac{V^2}{\rho}$, ce qu'il fallait établir.

5. *Au point de départ, la brachistochrone est normale à la surface de niveau correspondante.*

Soient (*fig.* 2) A le pied de la normale abaissée du

Fig. 2.



point de départ A_0 sur une surface de niveau qui en est infiniment voisine; B un point de cette surface infiniment voisin de A; φ l'angle $A A_0 B$; on a

$$A_0B = F\cos\varphi \frac{dt^2}{2} = \frac{A_0A}{\cos\varphi},$$

d'où

$$dt = \sqrt{\frac{2A_0A}{F\cos^2\varphi}},$$

expression dont le minimum correspond à $\varphi = 0$, ce qui est conforme à l'énoncé.

6. *Équations de la brachistochrone.* — Soient α, β, γ les angles formés par la tangente avec trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz; α', β', γ', et α'', β'', γ'' les angles semblables relatifs à la normale et à la binormale. Nous avons, en conservant à ε et à ρ les mêmes significations que ci-dessus,

$$\cos\alpha = \frac{dx}{dt}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{dt}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{dt},$$

$$\varepsilon = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2},$$

$$\cos\alpha' = \frac{d\cos\alpha}{\varepsilon}, \quad \cos\beta' = \frac{d\cos\beta}{\varepsilon}, \quad \cos\gamma' = \frac{d\cos\gamma}{\varepsilon},$$

$$\cos\alpha'' = \frac{\cos\beta\, d\cos\gamma - \cos\gamma\, d\cos\beta}{\varepsilon},$$

$$\cos\beta'' = \frac{\cos\gamma\, d\cos\alpha - \cos\alpha\, d\cos\gamma}{\varepsilon},$$

$$\cos\gamma'' = \frac{\cos\alpha\, d\cos\beta - \cos\beta\, d\cos\alpha}{\varepsilon} \quad (*).$$

Désignant le potentiel par $f(x, y, z)$, nous aurons d'abord, d'après le n° 3,

$$(2) \qquad \frac{df}{dx}\cos\alpha'' + \frac{df}{dy}\cos\beta'' + \frac{df}{dz}\cos\gamma'' = 0.$$

La composante de la force dirigée vers le centre de courbure est

$$\frac{df}{dx}\cos\alpha' + \frac{df}{dy}\cos\beta' + \frac{df}{dz}\cos\gamma';$$

d'ailleurs, on a

$$V^2 = 2f;$$

d'où, en vertu du n° 4,

$$(3) \qquad 2f\frac{\varepsilon}{ds} = \pm\left(\frac{df}{dx}\cos\alpha' + \frac{df}{dy}\cos\beta' + \frac{df}{dz}\cos\gamma'\right).$$

Les équations (2) et (3) définissent complétement la brachistochrone, en ayant égard à la condition du n° 5.

7. *Cas de la pesanteur.* — Soient Ox et Oy l'horizon-

(*) Menons en effet par l'origine O des parallèles à deux tangentes consécutives et portons sur leur direction, à partir du point O, une longueur $Oa = Oa'$, égale à l'unité; nous avons $aa' = \varepsilon$, et, comme les différences des coordonnées de a et a' sont $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$, $d\cos\gamma$, et que aa' est parallèle à la normale principale, on arrive facilement aux valeurs de ε, $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$.

L'aire de la projection du triangle aOa' sur le plan xOy a pour mesure

$$\frac{1}{2}(\cos\alpha\, d\cos\beta - \cos\beta\, d\cos\alpha);$$

mais elle est aussi égale à $\frac{\varepsilon}{2}\cos\gamma''$, d'où la valeur de $\cos\gamma''$, etc.

tale et la verticale du point de départ; α l'angle formé par la tangente avec Ox. On a

$$V^2 = 2gy,$$
$$\rho = -\frac{d\alpha}{ds}.$$

La composante normale de la force étant $g \cos\alpha$, il vient, d'après le n° 4,

$$2y = -\cos\alpha\frac{ds}{d\alpha} \quad \text{ou} \quad \sin\alpha\frac{d\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{dy}{2y};$$

d'où, en désignant par $2R$ une constante et remarquant que $\alpha = 90^0$ pour $y = 0$ (5),

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{y}{2R}}.$$

Soient mA la normale en m; A son intersection avec Ox; J l'intersection de la verticale de A avec la tangente; I la projection de m sur AJ. On a

$$y = AI, \quad mA = AJ.\cos\alpha = \sqrt{AJ.y};$$

d'où

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{y}{AJ}};$$

par suite $AJ = 2R$; la courbe est donc une cycloïde décrite par un point de la circonférence de rayon R roulant sur Ox, et dont un point de rebroussement coïncide avec le point de départ.

Nous ne croyons pas devoir reproduire ici la construction d'une brachistochrone passant par un point d'arrivée déterminé.

2° Le point mobile est assujetti à rester sur une surface fixe.

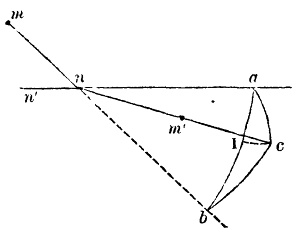
8. Le raisonnement et la figure du n° 4 s'appliquent

encore ici, supposant que mn représente l'intersection de la surface fixe avec une surface de niveau. Mais ici l'angle $i' - i$, que nous désignerons par η, n'est plus l'angle de contingence, et, au lieu de la formule (1), nous aurons la suivante, qui s'en déduit en remplaçant ε par η; d'où

$$(4) \qquad \frac{\eta}{ds} V^2 = \frac{dV}{dt} \tang i.$$

Soient a, b, c (*fig.* 3) les intersections des directions de

Fig. 3.



nn', mn, nm' avec la sphère ayant n pour centre et un rayon égal à l'unité. On a

$$ab = 90^\circ - i, \quad ac = 90^\circ - i - \eta;$$

bc est l'angle de contingence ε, et l'angle dièdre acb est l'un des angles supplémentaires θ que forme le plan osculateur avec le plan tangent en n. Le triangle sphérique abc donne

$$\sin i = \sin(i + \eta)\cos\varepsilon + \cos(i + \varepsilon)\sin\varepsilon\cos\theta,$$

ou, en s'en tenant aux termes du premier ordre en ε et η,

$$\eta = \varepsilon\cos\theta \text{ (*)},$$

(*) On peut arriver plus simplement à ce résultat en abaissant du point c une perpendiculaire cI sur ab, et considérant le triangle infinitesimal cIb.

et la formule (4) devient

$$(4) \qquad \frac{V^2}{\rho} = -\frac{dV}{dt}\frac{\tang i}{\cos\theta}.$$

Supposons que l'on décompose la force en F en deux autres, l'une normale à la surface, l'autre comprise dans le plan tangent et qui sera perpendiculaire à nn'; cette dernière se décompose en deux autres, l'une suivant mn égale à $\frac{dV}{dt}$, l'autre perpendiculaire à cette direction et qui sera $\frac{dV}{dt}\tang i$. Décomposons cette dernière en deux autres, l'une suivant la normale à la surface, et l'autre suivant le rayon de courbure et qui aura pour expression $\frac{dV}{dt}\frac{\tang i}{\cos\theta}$: on voit aussi que la formule (4) exprime que, si l'on décompose la force en trois autres respectivement dirigées suivant la normale à la surface, la tangente à la courbe et le rayon de courbure, la dernière est égale en valeur absolue à la force centripète.

L'équation (4) exprimée en coordonnées et l'équation de la surface détermineront complétement la brachistochrone, en tenant compte de cette condition que l'on établirait de la même manière qu'au n° 5, savoir que, au point de départ, la courbe est normale à la courbe d'intersection de la surface de niveau correspondante et de la surface fixe.