Nouvelles annales de mathématiques

FAURE

Théorie des indices

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 16 (1877), p. 541-562

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__541_1>

THÉORIE DES INDICES;

PAR M. FAURE,
Chef d'escadrons d'Artillerie.

[SUITE (*).]

Propriétés de trois surfaces qui passent par les mêmes points.

157. De la relation (1)' (148) nous déduisons ce théorème :

Lorsque trois surfaces S, S', Φ *ont la même intersection, si l'on prend deux points* e, e' *conjugués à* Φ, *le quotient* $\frac{I_{ee'}}{I'_{ee'}}$ *des indices de ce système de points, par rapport aux deux autres* S *et* S', *est égal au paramètre* φ *de la surface* Φ.

Nous aurons des corollaires de ce théorème en rem-

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XV, p. 251, 292, 339, 451, 81, 529, et t. XVI, p. 5, 160, 193, 249, 289, 508.

plaçant les indices par leurs valeurs. Désignons par a et b, a' et b' les traces de la droite ee' sur les surfaces S et S′ respectivement, par ε_0 et ε'_0, les demi-diamètres de ces surfaces parallèles à ee', on a (46)

$$\frac{ea.e'b + eb.e'a}{\varepsilon_0^2} : \frac{ea'.e'b' + eb'.e'a'}{\varepsilon_0'^2} = \varphi.$$

Si dans cette relation e est le centre de Φ, e' est à l'infini, de sorte que

$$\frac{ea + eb}{\varepsilon_0^2} : \frac{ea' + eb'}{\varepsilon_0'^2} = \varphi.$$

158. Si le point e' coïncide avec e, on a cet énoncé :

Lorsque trois surfaces S, S′, Φ *ont la même intersection, si l'on prend sur la dernière un point* e, *le quotient* $\frac{\mathrm{I}_e}{\mathrm{I}'_e}$ *des indices de ce point, par rapport aux deux autres* S *et* S′, *est égal au paramètre* φ *de la surface* Φ.

Remplaçons les indices par leurs valeurs.

(a) Soient E, E′ les plans polaires du point e par rapport aux surfaces S et S′; menons les diamètres oe, $o'e$ de ces surfaces, lesquels coupent respectivement aux points p et p' les plans E et E′.

D'après la définition,

$$\mathrm{I}_e = -\frac{ep}{op},\quad \mathrm{I}'_e = -\frac{ep'}{op'},$$

de sorte que

$$\frac{ep}{op} : \frac{ep'}{o'p'} = \varphi.$$

Ce résultat peut s'interpréter géométriquement.

Menons la droite pp' qui vient couper en q la ligne des centres oo'. Le triangle eoo', coupé par la transversale $pp'q$, donne

$$\frac{ep.o'p'.oq}{op.ep'.o'q}=1;$$

d'où, à cause de la relation précédente,

$$\frac{o'q}{oq}=\varphi,$$

ce qui prouve que le point q est fixe. Si nous disons que les points p, p' sont les points *réciproques* du point e par rapport aux surfaces S, S', on aura ce théorème :

Lorsque trois surfaces du second degré ont en commun les mêmes points, si l'on prend les points réciproques de chaque point de l'une par rapport aux deux autres, la droite qui joindra ces deux points passera par un point fixe.

b) Par le point e menons une transversale μ coupant la surface S aux points a et b, et une autre transversale μ' coupant la surface S' aux points a' et b'. Si μ_0 et μ'_0 sont les demi-diamètres de S et S' parallèles à ces transversales,

$$\mathrm{I}_e=\frac{ea.eb}{\mu_0^2},\quad \mathrm{I}'_e=\frac{ea'.eb'}{\mu_0'^2},$$

par conséquent,

$$\frac{ea.eb}{\mu_0^2}:\frac{ea'.eb'}{\mu_0'^2}=\varphi.$$

(c) Soient f un point pris sur la transversale μ, g un point pris sur la transversale μ', on peut écrire

$$\frac{\mathrm{I}_e}{\mathrm{I}_f}:\frac{\mathrm{I}'_e}{\mathrm{I}'_g}=\varphi\,\frac{\mathrm{I}'_g}{\mathrm{I}_f}$$

ou bien

$$\frac{ea.eb}{fa.fb}:\frac{ea'.eb'}{ga'.gb'}=\varphi\,\frac{\mathrm{I}'_g}{\mathrm{I}_f}.$$

Le premier membre de cette relation sera constant si les indices I_f, I'_g sont eux-mêmes constants. Or I_f est constant si le point f est pris sur une surface concentrique et homothétique à S; I'_g est constant si le point g est pris sur une surface concentrique et homothétique à S'. On pourra donc prendre les points f et g où l'on voudra sur l'une et l'autre de ces surfaces respectivement. Lorsque, en particulier, les points f et g sont fixes, on obtient le théorème général 386 du *Traité des sections coniques* de M. Chasles appliqué aux surfaces.

On peut, de la relation établie plus haut, déduire plusieurs conséquences. Supposons, en premier lieu, que le point g coïncide avec le point f et que ce point f soit pris sur une surface Φ' qui passe par les points communs aux surfaces S, S', Φ; le rapport $\frac{I_f}{I'_f}$ est alors égal au paramètre φ' de la surface Φ', et nous avons

$$\frac{ea \,.\, eb}{fa \,.\, fb} : \frac{ea' \,.\, eb'}{fa' \,.\, fb'} = \frac{\varphi}{\varphi'}.$$

Si le point f est pris comme le point e sur la surface Φ, $\varphi = \varphi'$, et l'on a

$$\frac{ea \,.\, eb}{fa \,.\, fb} : \frac{ea' \,.\, eb'}{fa' \,.\, fb'} = 1,$$

relation d'involution entre les trois couples de points e, f, a, b et a', b'. Ainsi, *quand trois surfaces passent par les mêmes points, une transversale les rencontre en six points qui sont en involution.*

Si la transversale touche une des surfaces, son point de contact est un des points doubles de l'involution déterminée par les quatre points d'intersection des deux autres surfaces avec la tangente. Si la transversale touche deux surfaces, les points de contact sont conjugués harmoniques par rapport aux deux points d'intersection de la troisième surface avec la tangente.

De la relation (b) il résulte que, si les transversales μ, μ' restent parallèles à elles-mêmes,

$$\frac{ea.eb}{ea'.eb'} = \text{const.},$$

a et b, a' et b' étant les points d'intersection de μ et μ' avec les surfaces S et S', e l'un des points de la surface Φ.

Si l'on prend pour S une sphère et pour S' les plans des sections circulaires suivant lesquelles la sphère est supposée couper la sphère Φ, cette relation montre que, *quand une sphère* S *a un double contact avec une surface* Φ, *le carré de la tangente menée d'un point de* Φ *à la sphère et le produit des distances du même point aux plans des deux sections circulaires sont en raison constante.*

Supposons que la surface Φ enveloppe la surface S et prenons pour S' le plan de contact. Menons un plan M parallèle aux sections circulaires de S; ce plan coupe Φ suivant une conique, S suivant un cercle ayant un double contact avec la conique, et le plan de contact suivant une droite ε. Pour tout point e de la conique, on aura donc

$$\frac{ea}{(e, \varepsilon)} = \text{const.},$$

ea étant la tangente menée du point e au cercle, (e, ε) la distance du point e à la droite ε. De là :

Si une surface Φ *en enveloppe une autre* S, *tout plan cyclique de* S *coupe* Φ *suivant une conique qui a pour cercle focal le cercle suivant lequel le plan coupe* S, *et si le plan touche la surface* S *en un ombilic, ce point sera le foyer de la conique.*

159. On a vu (150) qu'entre les indices d'un point e pris par rapport à trois surfaces S, S', S'', ayant la

même courbe d'intersection, il existait la relation

$$I''_e = \lambda I_e + \lambda' I'_e.$$

Par le point e menons une transversale rencontrant nos trois surfaces aux points a et b, a' et b', a'' et b'', et appelons ε_0, ε'_0, ε''_0 leurs demi-diamètres parallèles à la transversale, on aura

$$\frac{ea''.eb''}{\varepsilon''^2_0} = \lambda \frac{ea.eb}{\varepsilon^2_0} + \lambda' \frac{ea'.eb'}{\varepsilon'^2_0},$$

et, si le point e est à l'infini,

$$\frac{1}{\varepsilon''^2_0} = \frac{\lambda}{\varepsilon^2_0} + \frac{\lambda'}{\varepsilon'^2_0}.$$

Ainsi, *lorsque trois surfaces ont les mêmes points d'intersection, si l'on mène dans chacune d'elles un diamètre parallèle à une direction arbitraire, il existera une relation linéaire entre les carrés des valeurs inverses de ces trois diamètres.*

Si cette direction arbitraire est parallèle à l'une des génératrices du cône asymptote de la surface S″, le diamètre ε''_0 est infini, de sorte que la relation ci-dessus donne

$$\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon'_0} = \text{const.}$$

Par conséquent, *lorsque trois surfaces* S, S′, S″ *ont la même courbe d'intersection, si par les centres des deux premières* S *et* S′, *on mène des cônes parallèles au cône asymptote de la troisième* S″, *ces cônes couperont les surfaces* S *et* S′ *suivant des courbes homothétiques.*

Au lieu du cône asymptote de S″, on peut prendre l'un de ceux que l'on peut mener par l'intersection SS′.

Propriétés de cinq surfaces inscrites à la même développable.

160. Lorsque le point e' coïncide avec le point e, la relation [(3)' 144] devient

$$o = \frac{I_e}{\pi^4} - \frac{M'}{\pi^4}\varphi + \frac{M}{\pi'^4}\varphi^2 - \frac{I'_e}{\pi'^4}\varphi^3,$$

en posant

$$M' = I_e \sum \frac{I'_A}{I_A} + \frac{1}{\pi^2}\sum \frac{(e, A)^2 I'_A}{I_A^2},$$

$$M = I'_e \sum \frac{I_A}{I'_A} + \frac{1}{\pi'^2}\sum \frac{(e, A)^2 I_A}{I'^2_A},$$

de sorte que, si l'on désigne par φ_1, φ_2, φ_3 les paramètres des trois surfaces inscrites à la développable (SS') qui passent par le point e,

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3 = \frac{\pi'^4}{\pi^4}\frac{I_e}{I'_e}.$$

Par conséquent, *si l'on inscrit à la développable* (SS') *trois surfaces, le rapport* $\frac{I_e}{I'_e}$ *des indices d'un des points d'intersection de ces dernières par rapport aux surfaces* S *et* S' *est constant pour les huit points d'intersection.*

On peut dire encore, d'après (158) : *Lorsque cinq surfaces sont inscrites à la même développable, les huit points d'intersection de trois d'entre elles et la courbe d'intersection des deux autres appartiennent à une même surface.*

De ce théorème on peut déduire plusieurs corollaires :

1° Si l'on prend pour l'une des surfaces une face du tétraèdre autopolaire, on voit que, *lorsque quatre surfaces sont inscrites à la même développable par les* *points d'intersection de trois d'entre elles, on peut mener quatre surfaces circonscrites à la quatrième : les plans de contact coïncident avec les faces du tétraèdre autopolaire aux surfaces données.*

2° Si deux des surfaces coïncident avec deux des faces du tétraèdre autopolaire, *trois surfaces étant inscrites à la même développable, par l'intersection de deux d'entre elles, on peut mener six surfaces ayant un double contact avec la troisième : les cordes de contact sont les arêtes du tétraèdre autopolaire aux surfaces données.*

3° Si trois surfaces coïncident avec trois des faces du tétraèdre autopolaire, on en conclut que, *deux surfaces étant données, les sommets des cônes que l'on peut mener par leur intersection sont les sommets du tétraèdre autopolaire aux surfaces données.*

4° Lorsque deux des surfaces coïncident avec deux des faces du tétraèdre autopolaire, on peut encore en conclure que, *quand trois surfaces sont inscrites à la même développable, leurs huit points d'intersection sont les sommets d'un hexaèdre dont les faces opposées et les plans diagonaux se coupent deux à deux suivant les arêtes du tétraèdre autopolaire,* d'où il résulte aussi que *les arêtes de cet hexaèdre vont se couper quatre à quatre aux sommets du tétraèdre.*

Interprétation géométrique des coefficients M *et* M'.

161. Dans l'équation (160), la somme des paramètres des surfaces inscrites à la développable (SS'), et qui passent au point e, est donnée par la relation

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \frac{M}{I'_e}.$$

Soient F, G, H les plans tangents menés à ces surfaces par le point e,

$$\varphi_1 = \frac{I_F}{I'_F}, \quad \varphi_2 = \frac{I_G}{I'_G}, \quad \varphi_3 = \frac{I_H}{I'_H},$$

de sorte que

$$\frac{I_F}{I'_F} + \frac{I_G}{I'_G} + \frac{I_H}{I'_H} = \frac{M}{I_e}.$$

Nous savons (153) que les trois plans F, G, H déterminent un trièdre conjugué à toutes les surfaces inscrites à la développable (SS′), et en particulier à la surface S′. Or il résulte de la relation (c, 68) que, si par un point fixe e on mène trois plans F, G, H conjugués à la surface S′, la somme $\frac{I_F}{I'_F} + \frac{I_G}{I'_G} + \frac{I_H}{I'_H}$ conserve une valeur constante, quels que soient ces trois plans; donc, *lorsque cette somme sera nulle, on pourra par le point e mener trois plans tangents à* S, *qui seront conjugués à* S′.

Désignons par ε, φ, ψ les arêtes du trièdre FGH, la relation précédente pourra s'écrire

$$\frac{I'_\varepsilon}{I_\varepsilon} + \frac{I'_\varphi}{I_\varphi} + \frac{I'_\psi}{I_\psi} = \frac{\pi^2}{\pi'^2}\frac{M}{I_e};$$

car, si ε est l'arête opposée à la face F de ce tétraèdre, on a (85, 5°)

$$I_\varepsilon I_F = -\frac{I_e\,\overline{\sin}^2\,\varepsilon F}{\pi^2}, \quad I'_\varepsilon\,I'_F = -\frac{I'_e\,\overline{\sin}^2\,\varepsilon F}{\pi'^2},$$

et l'on a deux autres relations analogues. D'après le n° 69, si par un point fixe e on mène trois axes ε, φ, ψ conjugués à S, la somme $\frac{I'_\varepsilon}{I_\varepsilon} + \frac{I'_\varphi}{I_\varphi} + \frac{I'_\psi}{I_\psi}$ est constante quels que soient les trois axes. *Si donc cette somme est nulle, on pourra par le point e mener trois tangentes à* S′ *qui seront conjuguées à* S.

Remarquons que $o = \sum \frac{(e, A)^2 I_A}{I'^2_A}$ est l'équation par points de la polaire réciproque de S par rapport à S' (113); or, l'équation $M = o$ étant satisfaite en posant

$$I'_e = o, \quad o = \sum \frac{(e, A)^2 I_A}{I_A'^2},$$

nous voyons que la surface M passe par la courbe de contact de S' avec la développable (SS'). La surface M' passe aussi par la courbe de contact de cette développable avec S.

Si l'on observe que $-\pi'^2 I'_e = \sum \frac{(e, A)^2}{I'_A}$, on pourra écrire M sous la forme

$$-\pi'^2 M = \sum \frac{(e, A)^2}{I'_A} \left(\frac{I_B}{I'_B} + \frac{I_C}{I'_C} + \frac{I_D}{I'_D} \right);$$

on aurait de même

$$-\pi^2 M' = \sum \frac{(e, A)^2}{I_A} \left(\frac{I'_B}{I_B} + \frac{I'_C}{I_C} + \frac{I'_D}{I_D} \right).$$

Ces divers résultats donnent ce théorème : *Deux surfaces* S *et* S' *étant données, si du point e on peut mener trois plans tangents à* S *déterminant un trièdre conjugué à* S', *on pourra aussi de ce point mener trois tangentes à* S' *déterminant un trièdre conjugué à* S. *Le lieu du point e qui satisfait à cette condition est une surface* M *conjuguée au tétraèdre autopolaire des surfaces* S *et* S', *et qui passe par la courbe de contact de* S' *avec la développable circonscrite aux surfaces* S *et* S'.

Remarque. — Lorsque $\sum \frac{I_A}{I'_A} = o$, la surface M coïncide avec la polaire réciproque de S par rapport à S'.

D'après la relation (c) du n° 68, la condition $\sum \frac{I_A}{I'_A} = o$ signifie que la surface S est inscrite à un tétraèdre conjugué à la surface S'. On a donc ce théorème : *On donne deux surfaces* S *et* S′ *telles que la première* S *soit inscrite à un tétraèdre conjugué à* S′, *et l'on prend la polaire réciproque* M *de* S *par rapport à* S′; *d'un point quelconque e de cette polaire on peut mener trois plans tangents à* S *déterminant un trièdre conjugué à* S′, *et par ce même point on peut mener trois tangentes à* S′ *déterminant un trièdre conjugué à* S.

Ce théorème a plusieurs corollaires. Par exemple, si S est un paraboloïde, nous voyons que, *quand un paraboloïde* S *est inscrit à un tétraèdre conjugué à une surface* S′, *par le centre de* S′, *on pourra mener à* S *trois plans tangents qui seront conjugués à* S′, *et à* S′ *trois tangentes déterminant un trièdre conjugué à* S.

Propriétés de cinq surfaces passant par les mêmes points.

162. Lorsque le plan E′ coïncide avec le plan E, la relation (3′) du n° 148 devient

$$o = I_E - m'\varphi + m\varphi^2 - I'_E\varphi^3,$$

en posant

$$m = I'_E \sum \frac{I_a}{I'_a} + \frac{1}{\pi'^2} \sum \frac{(a, E)^2 I_a}{I'^2},$$

$$m' = I_E \sum \frac{I'_a}{I_a} + \frac{1}{\pi^2} \sum \frac{(a, E)^2 I'_a}{I_a^2},$$

de sorte que, si l'on désigne par φ_1, φ_2, φ_3 les paramètres des trois surfaces du système qui touchent le plan E,

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3 = \frac{I_E}{I'_E}.$$

Par conséquent : *si par l'intersection des deux surfaces* S *et* S′ *on trace trois surfaces, le rapport* $\frac{I_E}{I'_E}$ *des* *indices d'un plan* E *tangent à ces trois surfaces, par rapport à* S, *et* S′ *aura la même valeur pour les huit plans tangents.*

On peut dire encore, d'après (156) : *Lorsque cinq surfaces ont les mêmes points d'intersection, les huit plans tangents communs à trois d'entre elles et la développable circonscrite aux deux autres touchent une même surface.*

De ce théorème il sera aisé de déduire les propositions corrélatives de celles du n° 160.

Interprétation géométrique des coefficients m et m′.

163. La somme des paramètres des surfaces qui passent par l'intersection SS′ et qui touchent le plan E est donnée (162) par la relation

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \frac{m}{I'_E}.$$

Soient f, g, h les points de contact de ces trois surfaces avec le plan E, nous avons

$$\varphi_1 = \frac{I_f}{I'_f}, \quad \varphi_2 = \frac{I_g}{I'_g}, \quad \varphi_3 = \frac{I_h}{I'_h}.$$

de sorte que

$$\frac{I_f}{I'_f} + \frac{I_g}{I'_g} + \frac{I_h}{I'_h} = \frac{m}{I'_E}.$$

Nous savons (154) que les trois points f, g, h déterminent un triangle conjugué à toutes les surfaces menées par l'intersection SS′ et en particulier à la surface S′. Or il résulte de la relation (68, b) que, si dans un plan fixe E on prend trois points f, g, h conjugués à la surface S′, la somme

$$\frac{I_f}{I'_f} + \frac{I_g}{I'_g} + \frac{I_h}{I'_h}$$

est constante, quels que soient ces trois points; donc, *lorsque cette somme sera nulle, on pourra, sur l'intersection de la surface* S *par le plan* E, *prendre trois points* f, g, h *déterminant un triangle conjugué à* S'.

Désignons par ε, φ, ψ les côtés du triangle fgh, la relation précédente pourra s'écrire

$$\frac{I'_\varepsilon}{I_\varepsilon}+\frac{I'_\varphi}{I_\varphi}+\frac{I'_\psi}{I_\psi}=\frac{m}{I_E},$$

car, si ε est le côté opposé au sommet f de ce triangle, on a (85, 2°)

$$I_f I_\varepsilon=(f,\varepsilon)^2 I_E,\quad I'_f I'_\varepsilon=(f,\varepsilon)^2 I'_E,$$

et l'on a deux autres relations analogues. D'après le n° 69, si dans un plan fixe E on trace un triangle $\varepsilon\varphi\psi$ conjugué à S, la somme

$$\frac{I'_\varepsilon}{I_\varepsilon}+\frac{I'_\varphi}{I_\varphi}+\frac{I'_\psi}{I_\psi}$$

est constante, quels que soient les côtés de ce triangle. *Si donc cette somme est nulle, on pourra, dans le plan* E, *circonscrire à* S' *un triangle conjugué à* S.

Remarquons que $o=\sum\frac{(a,E)^2 I_a}{I'^2_a}$ est l'équation par plans de la polaire réciproque de S par rapport à S' (113); or, l'équation $m=o$ étant satisfaite en posant

$$I'_E=o,\quad \sum\frac{(a,E)^2 I_a}{I'^2_a},$$

nous voyons que la surface m touche les plans tangents communs à cette polaire et à la surface S'; il suit de là que la surface m touche tous les plans tangents de S' menés aux points d'intersection des surfaces S et S'.

Si l'on observe que

$$-\pi'^2 I'_E=\sum\frac{(a,E)^2}{I'_a},$$

on pourra écrire m sous la forme

$$-m.\pi'^2 = \sum \frac{(a, E)^2}{I'_a}\left(\frac{I_b}{I'_b} + \frac{I_c}{I'_c} + \frac{I_d}{I'_d}\right).$$

Ces divers résultats donnent ce théorème : *Deux surfaces* S *et* S′ *étant données, si dans un plan* E *on peut inscrire à* S *un triangle conjugué à* S′, *on pourra aussi dans ce même plan circonscrire à* S′ *un triangle conjugué à* S. *Les plans qui satisfont à cette condition enveloppent une surface* m *conjuguée au tétraèdre autopolaire des surfaces* S *et* S′, *et qui touche les plans tangents de* S′ *menés aux points d'intersection des surfaces* S *et* S′.

L'équation $m' = 0$ donne lieu à un théorème analogue.

Remarque. — Lorsque $\sum \frac{I_a}{I'_a} = 0$, la surface m coïncide avec la polaire réciproque de S par rapport à S′. D'après la relation (b) du n° 68, la condition $\sum \frac{I_a}{I'_a} = 0$ signifie que la surface S est circonscrite à un tétraèdre conjugué à S′. On a donc ce théorème : *On donne deux surfaces* S *et* S′ *telles, que la première* S *soit circonscrite à un tétraèdre conjugué à* S′, *et l'on prend la polaire réciproque* m *de* S *par rapport à* S′; *tout plan tangent à cette polaire coupe la surface* S *suivant une conique à laquelle on peut inscrire un triangle conjugué à* S′, *et il coupe* S′ *suivant une conique à laquelle on peut circonscrire un triangle conjugué à* S.

Propriétés de quatre surfaces inscrites à la même développable.

164. Lorsque la droite ε' coïncide avec ε, la rela-

tion $(2)'$ (144) devient

$$o = \frac{I_\varepsilon}{\pi^2} + \varphi \sum \frac{|\varepsilon, \nu|^2}{|\gamma, \nu|^2} \frac{I_C I'_D + I_D I'_C}{\overline{\sin}^2 CD} + \varphi^2 \frac{I'_\varepsilon}{\pi'^2},$$

de sorte que, si l'on désigne par φ_1 et par φ_2 les paramètres des deux surfaces du système qui touchent la droite ε,

$$\varphi_1 \varphi_2 = \frac{\pi'^2}{\pi^2} \frac{I_\varepsilon}{I'_\varepsilon};$$

d'où ce théorème : *Quatre surfaces étant inscrites à la même développable, si l'on mène une tangente commune* ε *à deux d'entre elles* Φ_1 *et* Φ_2, *le quotient* $\frac{I_\varepsilon}{I'_\varepsilon}$ *des indices de cette droite par rapport aux deux autres* S *et* S' *est constant, quelle que soit cette tangente.*

En remplaçant les indices par leurs valeurs, nous obtiendrons des énoncés différents de ce théorème.

(a) Si l'on désigne par a et b, a' et b' les points d'intersection de la droite ε avec les surfaces S et S', par ε_0 et ε'_0 les demi-diamètres de ces surfaces parallèles à ε, on a (49)

$$I_\varepsilon = -\frac{\overline{ab}^2}{4\varepsilon_0^4}, \quad I'_\varepsilon = -\frac{\overline{a'b'}^2}{4\varepsilon_0'^4};$$

par conséquent, pour toute droite ε qui touche les deux surfaces,

$$\frac{ab}{\varepsilon_0^2} : \frac{a'b'}{\varepsilon_0'^2} = \text{const.}$$

(b) Si l'on mène les plans tangents aux points a et a' des surfaces S et S', et par les centres o et o' des parallèles op, $o'p'$ à la droite ε, lesquelles rencontrent en p et p' les plans tangents, on a (49)

$$I_\varepsilon = -\frac{1}{\overline{op}^4}, \quad I'_\varepsilon = -\frac{1}{\overline{o'p'}^4},$$

de sorte que

$$\frac{op}{o'p'} = \text{const.}$$

Par conséquent : *Quatre surfaces étant inscrites à la même développable, si l'on mène une tangente commune ε à deux d'entre elles, et que l'on désigne par a et a' l'un des points où cette droite rencontre les deux autres surfaces S et S', en menant les plans tangents en ces points, lesquels rencontrent en p et p' les diamètres des surfaces S et S' parallèles à ε, la droite pp' passera par un point fixe.*

(c) Par la tangente ε menons un plan tangent A à S, et soit a le point de contact ; par la même droite menons un plan tangent A' à S', et soit a' son point de contact. Si l'on désigne par A_0, A'_0 le produit des demi-axes des sections faites dans les deux surfaces par des plans diamétraux parallèles aux plans qui touchent respectivement ces surfaces, nous avons (50)

$$I_\varepsilon = \frac{(a, \varepsilon)^2}{A_0^2}, \quad I'_\varepsilon = \frac{(a', \varepsilon)^2}{A_0'^2},$$

de sorte que, pour toute tangente ε,

$$\frac{(a, \varepsilon)^2}{A_0^2} : \frac{(a', \varepsilon)^2}{A_0'^2} = \text{const.} = \lambda.$$

163. Désignons par γ la droite aa' qui joint les points de contact, on a

$$\frac{(a, \varepsilon)}{(a', \varepsilon)} = \frac{\sin \gamma A'}{\sin \gamma A},$$

et la relation ci-dessus devient

$$\left(\frac{A'_0 \sin \gamma A'}{A_0 \sin \gamma A}\right)^2 = \lambda.$$

Mais, d'après la dernière expression du n° 49, on a

$$I_\gamma = -\frac{\sin^2\gamma A}{(o, A)^2}, \quad I'_\gamma = -\frac{\overline{\sin}^2\gamma A'}{(o', A')^2};$$

d'où résulte, par l'élimination de $\sin\gamma A$ et $\sin\gamma A'$,

$$\lambda \frac{I_\gamma}{I'_\gamma} = \frac{(o', A')^2 A'^{\,0}_2}{(o, A)^2 A^2_0} = \frac{\pi'^2}{\pi^2}.$$

Cette égalité montre que le rapport des indices de la droite γ par rapport aux surfaces S et S′ est constant; d'où ce théorème : *Quatre surfaces étant inscrites à la même développable, si par une tangente commune* ε *à deux d'entre elles on mène des plans tangents aux deux autres* S *et* S′, *les droites qui joindront les points de contact de la surface* S *aux points de contact de la surface* S′ *toucheront deux surfaces inscrites à la même développable.*

Interprétation géométrique du coefficient L.

166. Désignons par G et H les plans tangents menés par la droite ε aux deux surfaces inscrites à la développable (SS′) qui touchent cette droite ε,

$$\varphi_1 = \frac{I_G}{I'_G}, \quad \varphi_2 = \frac{I_H}{I'_H}.$$

Nous aurons, en appelant L le coefficient de φ dans l'équation (164),

$$\frac{I_G}{I'_G} + \frac{I_H}{I'_H} = \frac{\pi'^2}{\pi^2} L, \quad \frac{I'_G}{I_G} + \frac{I'_H}{I_H} = \frac{\pi^2}{\pi'^2} L.$$

Nous savons (153) que les plans G et H sont conjugués à toutes les surfaces inscrites à la développable. Or il résulte du théorème (68, c) que, si par une droite fixe ε on mène deux plans G et H conjugués à S′, la somme $\frac{I_G}{I'_G} + \frac{I_H}{I'_H}$ est constante, et que si ces plans sont conjugués à S, la somme $\frac{I'_G}{I_G} + \frac{I'_H}{I_H}$ est aussi constante, quels que soient les plans conjugués G et H. Il suit de là que, si ces sommes sont nulles, on pourra par la droite ε mener à S deux plans tangents qui seront conjugués à S'. et mener à S' deux plans tangents qui seront conjugués à S. Ainsi *l'équation* L = o *représente le complexe des droites telles que les plans tangents menés par chacune d'elles aux surfaces* S *et* S' *forment un faisceau harmonique*.

Les droites du complexe sont donc caractérisées par cette propriété; si par l'une d'elles on mène deux plans conjugués soit à S, soit à S', la somme des paramètres des surfaces du système qui touchent ces plans est nulle. Par conséquent, pour avoir des droites du complexe, il suffira de construire les deux surfaces du système, de paramètres φ et $-\varphi$,

$$(\varphi)\qquad \frac{(e,A)^2}{I_A+\varphi I'_A}+\frac{(e,B)^2}{I_B+\varphi I'_B}+\frac{(e,C)^2}{I_C+\varphi I'_C}+\frac{(e,D)^2}{I_D+\varphi I'_D}=o,$$

$$(-\varphi)\qquad \frac{(e,A)^2}{I_A-\varphi I'_A}+\frac{(e,B)^2}{I_B-\varphi I'_B}+\frac{(e,C)^2}{I_C-\varphi I'_C}+\frac{(e,D)^2}{I_D-\varphi I'_D}=o$$

et de mener à ces surfaces des tangentes communes; en donnant à φ toutes les valeurs possibles, on aura toutes les droites du complexe.

En éliminant φ entre ces deux équations, on trouve que le lieu des intersections des deux surfaces (φ) et $(-\varphi)$ est donné par la surface du quatrième degré

$$M.M' = I_e I'_e.$$

Cette surface joue un rôle important dans l'étude de ce complexe; son équation peut se mettre sous ces deux formes

$$o = \sum \frac{(e, A)^2}{I_A - \frac{M}{I'_e} I'_A}, \quad o = \sum \frac{(e, A)^2}{\frac{M'}{I_e} I_A - I'_A}.$$

Il est aisé de le vérifier; mais on y est conduit par la considération suivante. Soit f un point de l'intersection des surfaces (φ) et $(-\varphi)$; par ce point passe une troisième surface du système, et son paramètre φ' est déterminé (161) par la relation

$$\varphi - \varphi + \varphi' = \frac{M}{I'_f},$$

en écrivant, dans M, f au lieu de e. Ainsi cette troisième surface a pour équation

$$o = \sum \frac{(e, A)^2}{I_A - \frac{M}{I'_f} I'_A};$$

mais, puisque, en faisant varier le point f, on peut faire passer cette surface par tous les points d'intersection des surfaces (φ) et $(-\varphi)$, il est évident qu'en remplaçant le point f par le point variable e on aura le lieu des points d'intersection de ces surfaces, c'est-à-dire la première des équations écrites plus haut. La seconde s'obtient d'une manière analogue, en observant que

$$\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi'} = \frac{M'}{I_f},$$

en remplaçant dans M' le point e par le point f.

Lieu des droites du complexe situées dans un plan F.

Si l'on désigne par E et F deux plans quelconques menés par la droite ε, on a

$$\mathrm{L}\sin^2\mathrm{EF} = \sum \begin{vmatrix} (c, \mathrm{E}) & (d, \mathrm{E}) \\ (c, \mathrm{F}) & (d, \mathrm{F}) \end{vmatrix}^2 \frac{\mathrm{I_C I'_D + I_D I'_C}}{(c, \mathrm{C})^2 (d, \mathrm{D})^2}.$$

Cette relation peut s'écrire sous la forme très-simple (152)

$$\mathrm{L}\sin^2\mathrm{EF} = \mathrm{I_E I'_F + I_F I'_E - 2 I_{EF} I'_{EF}}.$$

Or, si le plan F est un plan fixe,

$$\mathrm{I_E I'_F - I_F I'_E} = 0$$

est l'équation de la surface inscrite à la développable (SS′) $\left(\text{dont le paramètre } \varphi = \frac{\mathrm{I_F}}{\mathrm{I'_F}}\right)$ qui touche le plan F; par conséquent,

$$\mathrm{I_E I'_F + I_F I'_E} = 0$$

est l'équation de la surface inscrite à cette même développable et dont le paramètre a pour valeur $-\frac{\mathrm{I_F}}{\mathrm{I'_F}}$ ou $-\varphi$. D'ailleurs les équations

$$\mathrm{I_{EF}} = 0, \quad \mathrm{I'_{EF}} = 0$$

représentent respectivement les pôles du plan F par rapport aux surfaces S et S′.

D'après cela, l'équation

$$\mathrm{L} = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{I_E I'_F + I_F I'_E + 2 I_{EF} I'_{EF}} = 0$$

nous montre que, pour avoir les droites du complexe situées dans le plan F, on construira la surface $-\varphi$ du système dont le paramètre est égal et de signe contraire à celui de la surface du système qui touche le plan F; on prendra ensuite les pôles du plan F par rapport aux surfaces S et S′, et l'on circonscrira à la surface $-\varphi$ des cônes ayant ces pôles pour sommets; ces cônes coupent le plan F suivant une même conique qui touche toutes les droites du complexe situées dans le plan F.

167. Considérons trois surfaces Φ_1, Φ_2, Φ_3 inscrites à la développable (SS′). On peut, d'une infinité de manières, tracer des trièdres conjugués à S dont les faces A, B, C touchent respectivement les surfaces Φ_1, Φ_2, Φ_3. Prenons le plan polaire D du sommet de ces trièdres, par rapport à S; nous formons ainsi des tétraèdres ABCD conjugués à S, et nous savons qu'alors (68) $\sum \frac{I'_A}{I_A} = \text{const.}$ Or, si φ_1, φ_2, φ_3 sont les paramètres des surfaces Φ_1, Φ_2, Φ_3, on a

$$I_A - \varphi_1 I'_A = 0, \quad I_B - \varphi_2 I'_B = 0, \quad I_C - \varphi_3 I'_C = 0,$$

de sorte que, les trois premiers rapports qui figurent dans l'expression ci-dessus étant constants, le quatrième $\frac{I_D}{I'_D}$ est aussi constant, et par conséquent (156) le plan D enveloppe une surface Φ_4 inscrite à la développable (SS′). Nous connaissons huit plans qui touchent cette surface Φ_4; car, si l'on considère un point d'intersection e des surfaces Φ_1, Φ_2, Φ_3, les plans tangents de ces surfaces au point e forment (153) un trièdre conjugué à S; donc le plan polaire de ce point e, par rapport à S, touchera Φ_4. De là ce théorème :

Quatre surfaces S, Φ_1, Φ_2, Φ_3 *étant inscrites à la même développable, si les faces* A, B, C *d'un trièdre conjugué à* S *touchent respectivement les surfaces* Φ_1, Φ_2, Φ_3, *le plan polaire du sommet de ce trièdre (par rapport à* S*) enveloppera une surface* Φ_4 *inscrite à la même développable et qui touchera les plans polaires (par rapport à* S*) des huit points d'intersection des surfaces* Φ_1, Φ_2, Φ_3.

D'où le suivant :

Quatre surfaces S, Φ_1, Φ_2, Φ_3 *étant inscrites à la même développable, si les faces* A, B, C *d'un trièdre conjugué à* S *touchent respectivement les surfaces* Φ_1, Φ_2, Φ_3, *le sommet de ce trièdre décrira une surface* Σ *du second degré, qui passera par les points d'intersection des surfaces* Φ_1, Φ_2, Φ_3 *et par la courbe de contact de la surface* S *avec la développable.*

Cette surface Σ est d'ailleurs conjuguée au tétraèdre autopolaire des surfaces données.

Corollaires. — 1° *Lorsque quatre surfaces* S, Φ_1, Φ_2, Φ_3 *sont inscrites à la même développable, on peut faire passer une surface* Σ *par les points d'intersection de trois d'entre elles et la courbe de contact de la quatrième avec la développable.*

2° On prend pour S une conique. *Étant données trois surfaces* Φ_1, Φ_2, Φ_3 *et une conique* S *inscrites à la même développable, si l'on mène trois plans touchant respectivement ces surfaces, de manière que leurs traces sur le plan de la conique forment un triangle conjugué à cette conique, le point d'intersection de ces plans décrira une surface* Σ *qui passera par la conique* S *et les huit points d'intersection des surfaces données.*

Si, dans ce corollaire, on prend pour S le cercle imaginaire de l'infini, les surfaces sont homofocales, et nous voyons que *le lieu du sommet des trièdres trirectangles, dont les faces touchent respectivement trois homofocales données, est une sphère concentrique aux homofocales et qui passe par leurs huit points d'intersection.*

(*A suivre.*)