FAURE

Théorie des indices

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 16 (1877), p. 508-521

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__508_0>

THÉORIE DES INDICES;

PAR M. FAURE,
Chef d'escadrons d'Artillerie.

[SUITE (*).]

145. Si l'on donne au paramètre φ les valeurs particulières $\frac{I_A}{I'_A}, \frac{I_B}{I'_B}, \frac{I_C}{I'_C}, \frac{I_D}{I'_D}$, les surfaces du système sont des coniques situées sur les faces du tétraèdre conjugué commun aux deux surfaces S et S'. Par exemple, pour $\varphi = \frac{I_D}{I'_D}$, la surface correspondante a pour équation par plans, par droites et par points, respectivement,

$$\frac{I_A I'_D - I_D I'_A}{(a, A)^2}(a, E)^2 + \frac{I_B I'_D - I_D I'_B}{(b, B)^2}(b, E)^2 + \frac{I_C I'_D - I_D I'_C}{(c, C)^2}(c, E)^2 = 0,$$

$$\frac{\overline{\sin}^2 AD}{I_A I'_D - I_D I'_A}\frac{|\varepsilon, \alpha|^2}{|\lambda, \alpha|^2} + \frac{\overline{\sin}^2 BD}{I_B I'_D - I_D I'_B}\frac{|\varepsilon, \beta|^2}{|\mu, \beta|^2} + \frac{\overline{\sin}^2 CD}{I_C I'_D - I_D I'_C}\frac{|\varepsilon, \gamma|^2}{|\nu, \gamma|^2} = 0,$$

$$(e, D)^2 = 0;$$

cela résulte des relations (1), (2), (3).

Les quatre coniques que nous obtenons ainsi sont les lignes de striction de Poncelet. Deux d'entre elles suffisent pour déterminer la développable (SS').

Si les surfaces S, S' sont concentriques, la développable qu'elles déterminent a une ligne de striction à l'infini, et réciproquement; si, de plus, cette conique coïncide avec le cercle imaginaire de l'infini, les sur-

---

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XV, p. 251, 292, 339, 451, 481, 529, et t. XVI, p. 5, 160, 193, 249, 289.

faces sont homofocales. Les lignes de striction prennent dans ce cas le nom de *focales*.

146. *Si le point e d'une ligne de striction de la développable* (SS′) *est pris pour sommet d'un cône circonscrit à l'une des surfaces* S *du système, ce cône aura un double contact avec toutes les surfaces du système.* Car, si nous menons la tangente au point e de la ligne de striction, on pourra par cette tangente mener deux plans tangents à S. Mais ces plans touchent aussi la ligne de striction; donc ils toucheront toutes les surfaces.

Lorsque, en particulier, les surfaces sont homofocales, on voit que, si l'on prend un point d'une focale pour sommet d'un cône circonscrit à l'une des surfaces, il aura un double contact avec toutes les autres; ce cône sera par conséquent de révolution, puisqu'il aura un double contact avec le cercle imaginaire de l'infini, qui est une des surfaces du système.

Des surfaces du second degré qui ont la même intersection.

147. Désignons par I_e, I'_e les indices d'un point e par rapport aux deux surfaces S et S′; si l'on a entre ces indices la relation

$$I_e - \varphi I'_e = 0,$$

dans laquelle φ est un paramètre donné, le point e décrira une surface Φ qui passera par l'intersection des surfaces S et S′.

On sait que deux surfaces admettent un même tétraèdre autopolaire $abcd$, et l'on voit, d'après la forme de la relation précédente, que ce tétraèdre est aussi conjugué à toutes les surfaces Φ qui passent par l'intersection SS'.

Des relations établies (85, 30°) on déduit les suivantes :

$$I_{ee'} = \sum \frac{(e, A)(e', A)}{(a, A)^2} I_a \qquad (4 \text{ termes}),$$

$$I_{\varepsilon\varepsilon'} = \sum \frac{|\varepsilon, \nu|\,|\varepsilon', \nu|}{|\gamma, \nu|^2} \frac{I_a I_b}{\overline{ab}^2} \qquad (6 \text{ termes}),$$

$$-\pi^2 I_{EE'} = \sum \frac{(a, E)(a, E')}{I_a} \qquad (4 \text{ termes}).$$

Elles donnent l'indice du système de deux points, de deux droites et de deux plans à l'aide de formules qui ne contiennent que les indices des sommets du tétraèdre autopolaire *abcd*.

148. Il suit de là que, si nous prenons dans l'espace deux points e, e', deux droites ε, ε', deux plans E, E', les paramètres des surfaces menées par l'intersection SS', et qui sont respectivement conjuguées aux points, aux droites et aux plans, sont déterminés par les relations

$$(1) \qquad 0 = \sum \frac{(e, A)(e, A')}{(a, A)^2} (I_a - \varphi I'_a),$$

$$(2) \qquad 0 = \sum \frac{|\varepsilon, \nu|\,|\varepsilon', \nu|}{|\gamma, \nu|^2} \frac{(I_a - \varphi I'_a)(I_b - \varphi I'_b)}{\overline{ab}^2},$$

$$(3) \qquad 0 = \sum \frac{(a, E)(a, E')}{I_a - \varphi I'_a}.$$

Si l'on développe ces équations en tenant compte des relations établies (85), on trouvera

$$(1)' \qquad 0 = I_{ee'} - \varphi I'_{ee'},$$

$$(2)' \qquad 0 = I_{\varepsilon\varepsilon'} - \varphi \sum \frac{|\varepsilon, \nu|\,|\varepsilon', \nu|}{|\gamma, \nu|^2} \frac{I_a I'_b + I_b I'_a}{\overline{ab}^2} + \varphi^2 I'_{\varepsilon\varepsilon'},$$

$$(3)' \qquad 0 = I_{EE'} - \varphi m' + \varphi^2 m - \varphi^3 I'_{EE'}.$$

Nous avons posé

$$m = \mathrm{I}'_{\mathrm{EE}'}\sum\frac{\mathrm{I}_a}{\mathrm{I}'_a} + \frac{1}{\pi'^2}\sum\frac{(a,\mathrm{E})(a,\mathrm{E}')\mathrm{I}_a}{\mathrm{I}'^2_a},$$

$$m' = \mathrm{I}_{\mathrm{EE}'}\sum\frac{\mathrm{I}'_a}{\mathrm{I}_a} + \frac{1}{\pi^2}\sum\frac{(a,\mathrm{E})(a,\mathrm{E}')\mathrm{I}'_a}{\mathrm{I}^2_a},$$

π et π' désignant les produits des demi-axes des surfaces S et S'. Ces relations montrent que par l'intersection SS' on peut mener une surface conjuguée au système de deux points, deux surfaces conjuguées au système de deux droites, trois surfaces conjuguées au système de deux plans.

149. Lorsque le point e' coïncide avec le point e, la droite ε' avec ε, le plan E' avec le plan E, les équations (1), (2), (3) ou leurs transformées sont respectivement l'équation par points, l'équation par droites et l'équation par plans de la surface Φ menée par l'intersection SS'.

Si l'on donne à φ les valeurs particulières $\frac{\mathrm{I}_a}{\mathrm{I}'_a}$, $\frac{\mathrm{I}_b}{\mathrm{I}'_b}$, $\frac{\mathrm{I}_c}{\mathrm{I}'_c}$, $\frac{\mathrm{I}_d}{\mathrm{I}'_d}$, les surfaces du système sont des cônes qui ont pour sommets les sommets a, b, c, d du tétraèdre autopolaire. Par exemple, pour $\varphi = \frac{\mathrm{I}_d}{\mathrm{I}'_d}$, la surface correspondante a pour équation par points, par droites et par plans,

$$\frac{\mathrm{I}_a\mathrm{I}'_d - \mathrm{I}_d\mathrm{I}'_a}{(a,\mathrm{A})^2}(e,\mathrm{A})^2 + \frac{\mathrm{I}_b\mathrm{I}'_d - \mathrm{I}_d\mathrm{I}'_b}{(b,\mathrm{B})^2}(e,\mathrm{B})^2 + \frac{\mathrm{I}_c\mathrm{I}'_d - \mathrm{I}_d\mathrm{I}'_c}{(c,\mathrm{C})^2}(e,\mathrm{C})^2 = 0,$$

$$\frac{|\varepsilon,\lambda|^2\overline{da}^2}{\mathrm{I}_a\mathrm{I}'_d - \mathrm{I}_d\mathrm{I}'_a} + \frac{|\varepsilon,\mu|^2\overline{db}^2}{\mathrm{I}_b\mathrm{I}'_d - \mathrm{I}_d\mathrm{I}'_b} + \frac{|\varepsilon,\nu|^2\overline{dc}^2}{\mathrm{I}_c\mathrm{I}'_d - \mathrm{I}_d\mathrm{I}'_c} = 0,$$

$$(d,\mathrm{E})^2 = 0.$$

Cela résulte immédiatement des relations (1), (2), (3).

150. On peut encore écrire sous une forme plus générale, et indépendante de tout système de coordonnées, les équations des surfaces inscrites à la développable (SS') ou qui passent par l'intersection de ces mêmes surfaces.

Si, en effet, S et S' sont les équations par points des deux surfaces données, $S + kS'$ est l'équation d'une surface S'' qui passe par l'intersection des deux premières; or les expressions S et S' sont proportionnelles aux indices d'un point variable e par rapport à ces deux surfaces; par conséquent, si I, I', I'' indiquent les indices pris par rapport aux trois surfaces S, S', S'', il existera entre ces indices une relation de la forme

$$I''_e = \lambda I_e + \lambda' I'_e,$$

dans laquelle λ et λ' sont des constantes.

De même, entre les indices d'un plan variable E, pris par rapport à trois surfaces S, S', S'' inscrites à la même développable, il existera la relation

$$I''_E = \lambda I_E + \lambda' I'_E.$$

151. Considérons la première. Par rapport aux surfaces S et S', l'indice du système de deux points e, e' est donné par les relations

$$I_{ee'} = \sum \frac{(e, A)(e', A)}{(a, A)^2} I_a, \quad I'_{ee'} = \sum \frac{(e, A)(e', A)}{(a, A)^2} I'_a,$$

les deux surfaces étant rapportées à leur tétraèdre conjugué commun *abcd*. Mais la surface S'' étant aussi conjuguée à ce tétraèdre, on a

$$I''_{ee'} = \sum \frac{(e, A)(e', A)}{(a, A)^2} I''_a = \sum \frac{(e, A)(e', A)}{(a, A)^2} (\lambda I_a + \lambda' I'_a),$$

ou bien

$$I''_{ee'} = \lambda I_{ee'} + \lambda' I'_{ee'}.$$

Ainsi il existera entre les indices d'un système de deux points une relation de même forme que celle qui existait entre les indices d'un seul point.

Il résulte de là que, si sur des droites ε, ε' nous prenons respectivement les points arbitraires e, f et e', f', nous pourrons, en appliquant à la surface S'' la relation 4° du n° 2, écrire

$$\begin{vmatrix} \lambda I_{ee'} + \lambda' I'_{ee'} & \lambda I_{ef'} + \lambda' I'_{ef'} \\ \lambda I_{fe'} + \lambda' I'_{fe'} & \lambda I_{ff'} + \lambda' I'_{ff'} \end{vmatrix} = ef.e'f' I''_{\varepsilon\varepsilon'},$$

et que de même, si dans des plans E, E′ nous prenons les points arbitraires efg, $e'f'g'$, nous pourrons, en appliquant à la surface S'' la relation 3° du n° 2, écrire

$$\begin{vmatrix} \lambda I_{ee'} + \lambda' I'_{ee'} & \lambda I_{ef'} + \lambda' I'_{ef'} & \lambda I_{eg'} + \lambda' I'_{eg'} \\ \lambda I_{fe'} + \lambda' I'_{fe'} & \lambda I_{ff'} + \lambda' I'_{ff'} & \lambda I_{fg'} + \lambda' I'_{fg} \\ \lambda I_{ge} + \lambda' I'_{ge'} & \lambda I_{gf'} + \lambda' I'_{gf'} & \lambda I_{gg'} + \lambda' I'_{gg'} \end{vmatrix} = 4 efg.e'f'g' I''_{EE'}.$$

En établissant la coïncidence entre les deux systèmes de points, ces relations nous donneront l'indice de la droite ε et du plan E par rapport à la surface S''; donc, si dans cette supposition on égale à zéro les premiers membres de ces équations, on obtiendra les équations par droites et par plans de la surface S''.

Du développement de la première on déduit

$$I''_{\varepsilon} = \lambda^2 I_{\varepsilon} + \frac{\lambda\lambda'}{\overline{ef}^2} \left\{ \begin{vmatrix} I_{ee} & I'_{ef} \\ I_{fe} & I'_{ff} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} I'_{ee} & I_{ef} \\ I'_{fe} & I_{ff} \end{vmatrix} \right\} + \lambda'^2 I'_{\varepsilon}.$$

152. La seconde relation donne lieu à des considérations analogues, en ayant égard aux théorèmes du n° 8. Ainsi, en désignant par EF, E′F′ deux couples de plans passant respectivement par les droites ε, ε', et remplaçant dans le premier des déterminants écrits ci-dessus les petites lettres par des lettres majuscules, on obtient la valeur de $-\frac{1}{\pi''^2}\sin EF \sin E'F' I''_{\varepsilon'}$, en appelant π'' le produit des demi-axes de la surface S''.

Si E, F, G et E', F', G' sont des plans passant, les premiers par le point e, les seconds par le point e', en remplaçant dans le second déterminant les petites lettres par les lettres majuscules, on obtient la valeur de

$$\frac{1}{\pi''^4}\sin EFG \sin E'F'G' I''_{ee'}.$$

De la première de ces équations on déduit

$$\frac{I''_\varepsilon}{\pi''^2} = \lambda^2\frac{I_\varepsilon}{\pi^2} - \frac{\lambda\lambda'}{\overline{\sin}^2 EF}\left\{\begin{vmatrix} I_{EE} & I'_{EF} \\ I_{FE} & I'_{FF}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} I'_{EE} & I_{EF} \\ I'_{EF} & I_{FF}\end{vmatrix}\right\} + \lambda'^2\frac{I'_\varepsilon}{\pi'^2}.$$

Égalé à zéro, ce second membre donne l'équation par droites de la surface S'' inscrite à la développable (SS'). La seconde donnerait l'équation par points de cette même surface.

153. La première relation (144)

$$o = I_{EE'} - \varphi I'_{EE'}$$

montre que, *si deux plans sont conjugués à deux surfaces du système, ils sont conjugués à toutes les surfaces du système.*

Il suit de là que, *si les plans* E, E' *touchent respectivement les surfaces* S *et* S' *en un point de l'intersection de ces surfaces, ces plans,* étant évidemment conjugués aux surfaces S et S', *seront conjugués à toutes les surfaces inscrites à la développable* (SS').

De même, *si trois surfaces inscrites à cette développable se coupent en un point e, les plans tangents menés en ce point à chacune de ces surfaces formeront un trièdre conjugué à toutes les surfaces inscrites à la développable* (SS').

D'après la relation (2), il y a deux surfaces inscrites à cette développable qui touchent une droite donnée ε; si par cette droite on mène un plan tangent à chacune de ces surfaces, ils sont conjugués à chacune d'elles; donc *ces deux plans tangents sont aussi conjugués à toutes les surfaces inscrites à la développable* (SS').

Si l'on prend les pôles d'un plan E par rapport aux surfaces inscrites à la développable (SS'), ces pôles seront sur une droite facile à déterminer. Menons en effet la surface inscrite à la développable qui touche le plan E, et soit e son point de contact; il y a deux autres surfaces du système qui passent par ce point e, et si E', E'' sont les plans tangents de ces surfaces en ce point, la droite cherchée est l'intersection E'E''; cette droite est conjuguée au plan E par rapport aux surfaces S et S', et par suite par rapport à toutes les surfaces du système.

154. La première relation (148)

$$o = \mathrm{I}_{ee'} - \varphi \mathrm{I}'_{ee'}$$

nous montre que, *si deux points e, e' sont conjugués aux deux surfaces* S *et* S', *ils sont aussi conjugués à toutes les surfaces* Φ *qui passent par l'intersection* SS'.

Il résulte de là que, *si les points e, e' sont les points de contact d'un plan tangent aux surfaces* S *et* S', *ces points sont conjugués à toutes les surfaces qui passent par l'intersection* SS'. Car ces points e, e', étant évidemment conjugués aux surfaces S et S', seront, d'après le théorème précédent, conjugués à toutes les surfaces qui passent par la courbe SS'.

De même, *si trois surfaces menées par l'intersection* SS' *touchent un même plan, les points de contact déterminent un triangle conjugué à toutes les surfaces du système, et si deux surfaces menées par l'intersec-*

tion SS′ *touchent une même droite, les points de contact sont conjugués à toutes les surfaces du système.*

Nous voyons encore que, *si l'on prend les plans polaires d'un même point e par rapport à toutes les surfaces menées par l'intersection* SS′, *ces plans passeront par une droite fixe.* Menons, en effet, la surface Φ du système qui passe au point e, et soit E le plan tangent de Φ en ce point; il y a deux autres surfaces du système qui touchent ce plan E, et si e', e'' sont les points de contact, la droite fixe est $e'e''$. Cette droite $e'e''$ étant en effet conjuguée au point e par rapport à toutes les surfaces du système, les plans polaires du point e passeront tous par cette droite.

Propriétés de trois surfaces inscrites à la même développable.

155. De la relation [(1)′, 144] il résulte que, *quand trois surfaces* S, S′, Φ *sont inscrites à la même développable, si l'on prend deux plans* E, E′ *conjugués à* Φ, *le quotient* $\frac{I_{EE'}}{I'_{EE'}}$ *des indices de ce système de plans, pris par rapport aux surfaces* S *et* S′, *est égal au paramètre* φ *de la surface* Φ.

D'après (52), désignons par a et b les points d'intersection de la surface S avec son diamètre conjugué au plan E, par a' et b' les points d'intersection de la surface S′ avec son diamètre conjugué à ce même plan; on aura

$$\frac{(a, \mathrm{E})(b, \mathrm{E}') + (a, \mathrm{E}')(b, \mathrm{E})}{\pi^2} : \frac{(a', \mathrm{E})(b', \mathrm{E}') + (a', \mathrm{E}')(b', \mathrm{E})}{\pi'^2} = \varphi.$$

Si l'on prend le plan E′ à l'infini, le plan E passera par le centre de Φ, et la relation se réduira à

$$\frac{(a, \mathrm{E}) + (b, \mathrm{E})}{\pi^2} : \frac{(a', \mathrm{E}) + (b', \mathrm{E})}{\pi'^2} = \varphi,$$

ou bien, o et o' étant les centres de S et S′,

$$\frac{(o, \mathrm{E})}{\pi^2} : \frac{(o', \mathrm{E})}{\pi'^2} = \varphi.$$

Or cette égalité exige que le centre m de la surface Φ, par lequel est mené le plan arbitraire E, soit situé sur la ligne oo' qui joint les centres des deux premières; ainsi *le lieu du centre des surfaces inscrites à la développable* SS′ *est une droite,* et les points o, o', m étant les centres des surfaces S, S′, Φ, on a

$$\frac{om}{\pi^2} : \frac{o'm}{\pi'^2} = \varphi.$$

Cette relation donnera immédiatement la valeur du paramètre de la surface Φ, connaissant le centre m de cette surface.

156. Lorsque le plan E′ coïncide avec E, on voit que :

Quand trois surfaces S, S′, Φ *ont en commun les mêmes plans tangents, si l'on mène à la dernière un plan tangent quelconque* E, *le quotient* $\frac{\mathrm{I_E}}{\mathrm{I'_E}}$ *des indices de ce plan par rapport aux deux autres,* S *et* S′, *est égal à une constante* φ.

On obtiendra des corollaires de ce théorème en y remplaçant les indices par leurs valeurs.

(a) Si l'on désigne par F et G deux plans quelconques, on peut écrire

$$\frac{\mathrm{I_E}}{\mathrm{I_F}} : \frac{\mathrm{I'_E}}{\mathrm{I'_G}} = \varphi \frac{\mathrm{I'_G}}{\mathrm{I_F}},$$

de sorte que, si A, B sont les plans tangents de S menés par l'intersection EF, et A', B' les plans tangents de S' menés par la droite EG, on a (52)

$$\frac{\sin EA \sin EB}{\sin FA \sin FB} : \frac{\sin EA' \sin EB'}{\sin GA' \sin GB'} = \varphi \frac{I'_G}{I_F}.$$

Le premier membre de cette relation sera constant si I_F et I'_G le sont aussi; on pourra donc prendre (54) pour le plan F un plan tangent quelconque d'une homofocale déterminée de S, et pour le plan G un plan tangent aussi quelconque d'une homofocale donnée de S'. Si, en particulier, les plans F et G sont fixes, on a dans l'espace le théorème analogue au théorème général 396 du *Traité des sections coniques* de M. Chasles.

(b) Désignons par e et f les pôles des plans E, F par rapport à S,

$$\frac{I_E}{I} = \frac{(o, E)(e, E)}{(o, F)(f, F)};$$

mais

$$\frac{(o, E)}{(o, F)} = \frac{(f, E)}{(e, F)};$$

par conséquent

$$\frac{I_E}{I_F} = \frac{(e, E)(f, E)}{(e, F)(f, F)} = \frac{(f, E)}{(f, F)} \frac{\sin PE}{\sin PF},$$

en désignant par P le plan passant par le point e et l'intersection EF. On a de même

$$\frac{I'_E}{I'_G} = \frac{(g, E)}{(g, G)} \frac{\sin QE}{\sin QG},$$

g étant le pôle du plan G par rapport à S', e' le pôle du plan E par rapport à cette même surface, et Q le plan mené par le point e' et l'intersection EG. La relation précédente (a) donne donc, en supposant fixes les plans F et G,

$$\frac{(f, E) \sin PE}{\sin PF} : \frac{(g, E) \sin QE}{\sin QG} = \text{const.}$$

Appelant T le plan mené par les droites FG et PQ, nous avons

$$\frac{\sin PE . \sin QG . \sin FT}{\sin PF . \sin QE . \sin GT} = 1,$$

de sorte que la relation précédente devient

$$\frac{\sin GT}{\sin FT} \frac{(f, E)}{(g, E)} = \text{const.}$$

Si nous supposons que les points f et g coïncident,

$$\frac{\sin GT}{\sin FT} = \text{const.};$$

dans ce cas le plan T est donc fixe, et l'on a ce théorème :

Trois surfaces S, S′, Φ *ayant en commun les mêmes plans tangents, désignons par* F *et* G *les plans polaires d'un même point par rapport aux surfaces* S *et* S′; *si l'on mène un plan tangent* E *à la surface* Φ, *et que par les droites* EF, EG *on fasse passer les plans* P *et* Q *respectivement conjugués au plan* E *par rapport aux surfaces* S *et* S′, *lorsque le plan* E *roulera sur* Φ, *l'intersection* PQ *décrira un plan passant par la droite* FG.

(c) Si l'on désigne par A et B les plans tangents de S parallèles au plan E, par A′ et B′ les plans tangents de S′ parallèles à ce plan, on a (52)

$$\pi^2 I_E = (E, A)(E, B), \quad \pi'^2 I'_E = (E, A')(E, B'),$$

et, par conséquent,

$$\frac{(E, A)(E, B)}{(E, A')(E, B')} = \text{const.}$$

(d) Désignons par E le produit des demi-axes de la section faite dans S par le plan E, par E_0 le produit des demi-axes de la section diamétrale faite dans la mêm e surface par un plan parallèle au plan E, on a (52)

$$I_E = -\frac{E}{E_0^3},$$

et, relativement à la surface S',

$$I'_E = -\frac{E'}{E_0'^3},$$

en ajoutant un accent à ce qui est relatif à cette surface.

De là résulte la relation

$$\frac{E}{E_0^3} : \frac{E'}{E_0'^3} = \varphi.$$

A la surface Φ on peut mener deux plans tangents parallèles E et F. Le premier nous a donné la relation précédente; le second, à l'aide d'une notation analogue, donne

$$\frac{F}{E_0^3} \cdot \frac{F'}{E_0'^3} = \varphi.$$

La comparaison de ces égalités montre que

$$\frac{E}{F} = \frac{E'}{F'}.$$

Or les sections E, F de la surface S sont semblables, et de même les sections E', F' de la surface S'. Si p et p' sont les sommets de l'un des deux cônes que l'on peut mener par les sections E, F et E', F', l'égalité ci-dessus montre que

$$\frac{(p, E)^2}{(p, F)^2} = \frac{(p', E)^2}{(p', F)^2};$$

d'où, en prenant le même signe dans les deux membres,

$$\frac{(p, E)}{(p, F)} = \frac{(p', E)}{(p', F)}:$$

de là

$$\frac{(p, E)}{(p, E) - (p, F)} = \frac{(p', E)}{(p', E) - (p', F)}.$$

Or les dénominateurs sont égaux comme représentant la distance du plan F au plan E. Il en résulte

$$(p, \mathrm{E}) = (p', \mathrm{E});$$

les sommets p et p' sont donc à la même distance du plan E; et si q et q' sont les deux autres sommets des cônes menés par les sections semblables E, F et E′, F′, on aura aussi

$$(q, \mathrm{E}) = (q', \mathrm{E}),$$

de sorte que les droites pp', qq' sont parallèles aux plans tangents E, F de la surface Φ.

Trois surfaces S, S′, Φ *ayant en commun les mêmes plans tangents, on mène à la troisième deux plans tangents parallèles* E *et* F ; *ces plans coupent chacune des surfaces* S *et* S′ *suivant des coniques par lesquelles on peut faire passer deux cônes. Les sommets de ces quatre cônes déterminent un quadrilatère dont deux côtés sont parallèles aux plans* E *et* F.

(*A suivre.*)