Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 16 (1877), p. 477-480

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__477_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 580

(voir 1re série, t. XX, p. 139);

PAR M. H. BROCARD.

Résoudre les équations

$$(1)\quad u^6 - 3A^2u^4 + 3A^4(1-\gamma^2)u^2 - A^6(1 - 3\gamma^2 + 2\gamma^3) = 0,$$

$$(2)\quad u^6 - (2A^2 + C^2)u^4 + (2A^2C^2\sigma + A^4\sigma'')u^2 - A^2C^2\varpi = 0,$$

$$\sigma = 1 - \gamma^2,\quad \sigma'' = 1 - \gamma''^2,\quad \varpi = 1 + 2\gamma\gamma'\gamma'' - \gamma^2 - \gamma'^2 - \gamma''^2.$$

(LAMÉ.)

La première équation a été résolue dans le même volume (p. 295) par M. Jaufroid, qui a terminé son travail par ces mots : « La deuxième équation a-t-elle été exactement copiée ? », question à laquelle le rédacteur a répondu : « Oui (LAMÉ, p. 51), TM. ».

Cependant il était bien évident que l'équation (2) n'était pas homogène et que l'expression de ϖ ne pouvait renfermer γ'. Dans ces conditions, l'équation (2) n'admettait pas de solution littérale.

Terquem n'a pas donné l'indication de l'ouvrage de Lamé dont il avait extrait l'équation (2). On trouve dans les leçons de Lamé sur la *Théorie analytique de la chaleur* (p. 51) l'équation suivante

$$(3)\quad u^6 - u^4(2A^2 + C^2) + u^2[2A^2C^2 + A^4(1-\gamma''^2) - 2A^2C^2\gamma^2] - A^4C^2[1 - \gamma''^2 - 2\gamma^2 + 2\gamma^2\gamma''^2] = 0.$$

Pour combler la lacune que cette erreur de copie avait produite, nous nous bornons à indiquer la solution donnée par Lamé. On peut vérifier que le premier membre de l'équation (3) admet pour facteurs les polynômes

$$u^2 - A^2(1 - \gamma'')$$

et

$$u^4 - C^2u^2 - A^2u^2(1 + \gamma'') + A^2C^2(1 + \gamma'') - 2A^2C^2\gamma^2 = 0,$$

ce qui résout entièrement la question.

Question 1225

(voir 2e série, t. XV, p. 192);

PAR M. LOUIS THUILLIER,

Élève au lycée d'Amiens.

Soient S *et* S' *deux coniques dans un plan; le lieu des points d'intersection des diamètres de l'une et de l'autre des courbes correspondant à des cordes de même direction est en général une conique: examiner l'espèce de cette conique d'après l'espèce et la position relative des deux coniques* S *et* S'.

Les équations des deux coniques étant

$$(\mathrm{S}) \qquad f(x) = 0,$$

$$(\mathrm{S}') \qquad \varphi(x) = 0,$$

les équations des diamètres des cordes de direction m dans ces deux coniques seront

$$f'_x + mf'_y = 0, \quad \varphi'_x + m\varphi'_y = 0.$$

L'élimination de m entre ces deux équations donne pour le lieu cherché

$$f'_x\varphi'_y - f'_x\varphi'_y = 0,$$

c'est-à-dire une conique

Cherchons-en directement la nature par la considération des points à l'infini. On sait qu'il existe toujours dans deux coniques un système de diamètres conjugués parallèles (Painvin, *Géom. plane,* 889).

Cette proposition peut d'ailleurs se démontrer géométriquement. On sait qu'un système de diamètres conjugués forme avec les asymptotes un faisceau harmonique. Si l'on ramène les coniques à avoir le même centre, la recherche du système de diamètres conjugués communs revient à celle du système de deux droites conjuguées harmonique par rapport à deux autres, ou encore, si l'on coupe les asymptotes des deux coniques par une même droite, à la détermination sur cette droite du segment conjugué harmonique par rapport à deux autres, et l'on sait que le segment n'est imaginaire que quand les deux autres empiètent l'un sur l'autre (*).

A toute direction de cordes parallèle à l'un de ces diamètres conjugués correspondra un point du lieu à l'infini dans la direction conjuguée.

Donc le lieu sera une ellipse quand S et S′ seront des hyperboles dont les angles des asymptotes empiètent l'un sur l'autre.

Ce sera une parabole quand S et S′ auront une direction asymptotique commune, et cette direction asymptotique sera celle des diamètres de la parabole.

Le lieu se réduit à une droite quand S et S′ ont les mêmes directions asymptotiques, c'est-à-dire sont homothétiques; il disparaît quand S et S′ sont homothétiques et concentriques.

(*) Quand les deux segments ont une extrémité commune, les deux extrémités du segment conjugué harmonique se confondent avec cette extrémité commune.

Dans tous les autres cas, le lieu sera une hyperbole ayant pour directions asymptotiques celles des diamètres conjugues parallèles.

Note. — La même question a été résolue par MM. A. Boucher, élève du lycée d'Angers, Ch. Brunot, élève du lycée de Dijon, P. Souverain, élève du lycée de Clermont, E. Doublet, maître répétiteur au lycée de Lille, J. Ireson, élève de l'École des mines de Liége, Arnold Droz, professeur à l'institut Breidenstein, à Granges (Suisse), B. Launoy, Moret-Blanc et Ferd. Pisani.