E. AMIGUES

Mémoire sur les transformations du second ordre dans les figures planes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 16 (1877), p. 451-466
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__451_0>

MÉMOIRE SUR LES TRANSFORMATIONS DU SECOND ORDRE DANS LES FIGURES PLANES;

Par M. E. AMIGUES,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nice.

[suite (*).]

Dans le plan P, qui contient le point x, y, z, prenons pour côtés d'un triangle de référence les droites représentées par les équations

$$
\begin{aligned}
lx + my + nz &= 0,\\
l_1 x + m_1 y + n_1 z &= 0,\\
l_2 x + m_2 y + n_2 z &= 0;
\end{aligned}
$$

et ici encore adoptons des paramètres de reférence égaux à l'unité.

Les formules de transformation s'écrivent alors comme il suit :

$$\frac{\nu Z}{X'Y'} = \frac{\lambda X}{Y'Z'} = \frac{\mu Y}{Z'X'}$$

ou bien encore

$$\lambda XX' = \mu YY' = \nu ZZ'. \tag{1}$$

Si on laisse les deux triangles de référence arbitraires ainsi que les quantités λ, μ, ν, les relations (1) sont les relations algébriques les plus générales pour lesquelles à un point de chaque figure correspond un point et un seul de l'autre figure, sans que néanmoins il y ait homographie. Les transformations de figure définies par ces relations s'appellent *transformations du second ordre.*

(*) *Nouvelles Annales*, 2e serie, t. XVI, p. 422.

3 A la droite AB $(Z = 0)$ correspond le point C'

$$(X' = 0, Y' = 0).$$

A une courbe de degré m ayant pour équation

$$F(X, Y, Z) = 0$$

correspond une courbe de degré $2m$ ayant pour équation

$$F\left(\frac{1}{\lambda X'}, \frac{1}{\mu Y'}, \frac{1}{\nu Z'}\right) = 0.$$

La droite AB coupe la courbe d'ordre m en m points dont chacun a pour correspondant le point C'. Les points A', B', C' sont donc des points multiples d'ordre m de la courbe d'ordre $2m$.

Si la première courbe passe par le point A

$$(Y = 0, Z = 0),$$

la droite $B'C'$ $(X' = 0)$ fait partie de la deuxième courbe, dont le degré s'abaisse ainsi d'une unité, en même temps que l'ordre des points B' et C'. Si la première courbe passe par les points A, B, C, f, g, h fois, la deuxième courbe est de degré

$$2m - f - g - h,$$

l'ordre du point A' est

$$m - g - h,$$

celui du point B'

$$m - f - h,$$

celui du point C'

$$m - f - g.$$

En particulier, si une courbe d'ordre $2m$ passe m fois par chacun des points A, B, C, la courbe correspondante est de degré m et ne passe pas par les points A', B', C'.

A la droite BC correspond le point A'; à une droite menée par A, une droite menée par A′; à une droite quelconque une conique circonscrite au triangle A′B′C′. A une conique correspond une courbe de quatrième ordre à trois points doubles; à une conique passant par A correspond uue courbe de troisième ordre ayant A′ pour point double et B′, C′ pour points simples; à une conique passant par les sommets B et C correspond une conique passant par les sommets B′ et C′. A deux courbes ayant un contact d'ordre K correspondent deux courbes ayant un contact de même ordre.

4. A tout point multiple correspond un point multiple de même ordre; il n'y a d'exception que pour les sommets des triangle de référence qui sont des points multiples appartenant en propre à chaque courbe. Ce principe évident permet de calculer la classe de la transformée.

Soit une courbe d'ordre m passant f, g, h fois par les points A, B, C. La transformée est d'ordre

$$2m - f - g - h$$

et elle a trois points multiples A′, B′, C′, dont l'ordre est

$$m - g - h,$$
$$m - f - h,$$
$$m - f - g;$$

soient d'ailleurs n la classe de la première courbe; x la classe de la deuxième.

A part les points multiples placés aux sommets des deux triangles de référence, on sait qu'à un point multiple d'ordre K correspond un point multiple de même ordre. Ces points multiples communs donnent lieu dans les deux courbes à un même abaissement de classe que nous désignerons par w.

Soient d'autre part y et z les abaissements de classe produits dans la première et dans la seconde courbe par les points mnltiples qu'elles possèdent en propre. On a les équations suivantes :

$$(2)\left\{\begin{array}{l} m(m-1)-n=w+z, \\ (2m-f-g-h)(2m-f-g-h-1)-x=w+z; \end{array}\right.$$

$$(3)\left\{\begin{array}{l} y=f(f-1)+g(g-1)+h(h-1), \\ z=(n-f-g)(n-f-g-1)+(n-g-h)(n-g-h-1) \\ \qquad\qquad +(n-f-h)(n-f-h-1). \end{array}\right.$$

Eliminant w, y, z, on obtient

$$x=2m+n-2(f+g+h).$$

Pour $f=g=h=0$,

$$x=2m+n,$$

5. L'un des avantages de la transformation consiste à prendre une propriété d'une courbe d'ordre m et à voir ce qu'elle devient dans la transformée, qui est une courbe d'ordre $2m$ possédant trois points d'ordre m. Mais, pour que cette opération soit légitime, il ne faut pas employer des procédés de transformation trop particuliers, tels que celui des rayons vecteurs réciproques. On doit se borner à ceux pour lesquels *toute courbe* d'ordre $2m$ ayant trois points multiples d'ordre m est la transformée d'une courbe d'ordre m.

On voit d'après cela combien il importe de reconnaître les procédés qui ont ce privilége; or il n'est rien de plus facile. On a, en effet, la règle suivante : Pour qu'une courbe quelconque d'ordre $2m$ possédant trois points multiples d'ordre m puisse être regardée comme la transformée d'une courbe d'ordre m, il faut et il suffit que le procédé de transformation laisse arbitraire le triangle de référence dans la figure qui contient la courbe d'ordre $2m$.

La condition est évidemment nécessaire, et l'on voit en passant que le procédé des rayons vecteurs réciproques n'y satisfait point, puisque les trois sommets du triangle de référence sont le pôle et les points circulaires à l'infini.

La condition est d'ailleurs suffisante. En effet, soit une courbe d'ordre $2m$ avec trois points multiples d'ordre m. Prenons ces points pour sommets du triangle de référence dans la figure qui contient la courbe d'ordre $2m$. Pour déterminer cette courbe, il faut

$$\frac{2m(2m+3)}{2}$$

points. Mais les trois points d'ordre m valent

$$\frac{3m(m+1)}{2}$$

points simples. La courbe est donc déterminée, si l'on donne, outre les trois points d'ordre m, un nombre de points égal à

$$\frac{2m(2m+3)}{2}-\frac{3m(m+1)}{2}=\frac{m(m+3)}{2}.$$

A ces points, que l'on peut se donner pour déterminer la courbe, correspondent dans l'autre figure un nombre égal de points, qui définissent précisément une courbe d'ordre m.

6. Si l'on considère toutes les courbes du quatrième ordre ayant pour points doubles les trois sommets d'un triangle, on peut imposer à ces courbes cinq conditions nouvelles. Si on leur en impose quatre, on a un système. Nous appellerons *caractéristiques* de l'un de ces systèmes les nombres μ' et ν' qui indiquent combien de

courbes du système passent par un point donné et combien touchent une droite donnée.

Dans l'autre figure, on a un système de coniques assujetties non aux mêmes conditions, mais aux quatre *conditions correspondantes*. On sait que l'on appelle *caractéristiques* de ce système de coniques les nombres μ et ν qui expriment combien de coniques du système passent par un point donné et combien touchent une droite donnée. On sait aussi que les nombres μ et ν peuvent être obtenus par une méthode générale bien connue aujourd'hui.

Nous allons faire voir que les nombres μ' et ν' se calculent sans difficulté en fonction des nombres μ et ν.

μ', nombre de courbes passant par un point, est égal au nombre de coniques passant par le point correspondant, c'est-à-dire à μ. On a donc

$$\mu' = \mu. \tag{4}$$

ν', nombre de courbes tangentes à une droite, est égal au nombre des coniques tangentes à la conique qui sert de transformée à cette droite, c'est-à-dire au nombre des coniques d'un système (μ, ν) tangentes à une conique donnée. Ce nombre est égal à $2(\mu + \nu$ (*). On a donc

$$\nu' = 2(\mu + \nu),$$

ce qui prouve que le nombre ν' est nécessairement pair.

Reste à montrer comment les propriétés d'un système (μ', ν') s'expriment en fonction de ses caractéristiques.

(*) Le nombre des coniques d'un système (μ, ν), tangentes à une courbe d'ordre m et de classe n, est égal à $n\mu + m\nu$ (CHASLES, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1er août 1864).

On sait que plusieurs propriétés des coniques du système (μ, ν) se présentent sous la forme suivante :

Le lieu d'un point ω dans un système de coniques (μ, ν) est d'ordre $\alpha\mu + \beta\nu$.

Transformons cet énoncé. Le lieu d'un point ω' dans un système (μ', ν') de courbes du quatrième ordre à trois points doubles communs est une courbe d'ordre

$$2\left[\alpha\mu' + \frac{\beta}{2}(\nu' - 2\mu')\right],$$

ayant trois points multiples d'ordre moitié moindre, confondus avec les trois points doubles.

Donnons un exemple :

Si d'un point S on mène deux tangentes à chaque conique du système (μ, ν) et que par le point où l'une d'elles rencontre une droite Δ on mène une nouvelle tangente, celle-ci rencontre l'autre tangente issue de S sur une courbe de l'ordre $(\mu + 2\nu)$ qui a un point multiple d'ordre $(\mu + \nu)$ en S. (CHASLES, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXII.)

Voici le théorème transformé. On a un système de courbes du quatrième ordre (μ', ν') à trois points doubles communs. D'un point S on mène les deux coniques, passant par les trois points doubles, et tangentes à l'une des courbes du système. Par le quatrième point où l'une d'elles rencontre une conique fixe passant par les points doubles on mène une nouvelle conique passant par les points doubles et tangente à la courbe. Celle-ci coupe la seconde conique menée par S sur une courbe d'ordre $2(\nu' - \mu')$ ayant en S un point multiple d'ordre $\frac{\nu'}{2}$ et ayant aux trois points doubles des points d'ordre $\nu' - \mu'$.

Dès que nous avons eu l'idée de la méthode qui précède, nous l'avons mise à l'épreuve en essayant de transformer les nombreux théorèmes de M. Chasles sur les systèmes de coniques. Or, le plus souvent, nous avons été arrêté par la difficulté de définir le point ω' au moyen des seuls éléments de sa figure et indépendamment de la figure transformée qui contient le point ω. Réfléchissant à cette circonstance, nous sommes arrivé à cette conviction, que les transformations du second ordre seraient condamnées à une stérilité relative, tant qu'on n'aurait pas résolu la question suivante : « Une conique étant soumise à une transformation du second ordre, trouver dans la courbe transformée les éléments qui correspondent aux principaux éléments de la conique, tels que les foyers, le centre, les axes, les sommets, les diamètres, etc. » Ce problème, croyons-nous, n'a été ni traité, ni même posé. En tout cas, la considération des points circulaires à l'infini nous en a donné une solution fort simple que nous allons indiquer.

7. La droite de l'infini de chaque figure correspond dans l'autre figure à une conique circonscrite au triangle de référence. Si ces deux coniques sont des cercles, les points circulaires à l'infini de chaque figure correspondent aux points circulaires à l'infini de l'autre figure. Réciproquement, si les points circulaires se correspondent, le cercle circonscrit à chaque triangle de référence donne dans l'autre figure une droite passant par les points circulaires à l'infini, c'est-à-dire la droite de l'infini. Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que les points circulaires à l'infini se correspondent, c'est que la droite de l'infini de chaque figure donne dans l'autre figure le cercle circonscrit au triangle de référence.

Cherchons les caractères analytiques et géométriques de ces systèmes remarquables. La droite de l'infini par rapport au triangle de référence ABC a pour équation

$$X \sin A + Y \sin B + Z \sin C = 0.$$

Elle se transforme en une conique dont l'équation est

$$\frac{\sin A}{\lambda X'} + \frac{\sin B}{\mu Y'} + \frac{\sin C}{\nu Z'} = 0.$$

Cette conique doit coïncider avec le cercle circonscrit au triangle de référence A′B′C′ dont l'équation est

$$\frac{\sin A'}{X'} + \frac{\sin B'}{Y'} + \frac{\sin C'}{Z'} = 0.$$

Cela nous donne les conditions

$$(6) \text{ et } (7) \qquad \frac{\sin A}{\lambda \sin A'} = \frac{\sin B}{\mu \sin B'} = \frac{\sin C}{\nu \sin C'}.$$

On aura de même, pour exprimer que la droite de l'infini de la figure A′B′C′ se transforme en un cercle circonscrit au triangle ABC,

$$(8) \text{ et } (9) \qquad \frac{\sin A'}{\lambda \sin A} = \frac{\sin B'}{\mu \sin B} = \frac{\sin C'}{\nu \sin C}.$$

L'élimination des angles donne

$$\lambda^2 = \mu^2 = \nu^2,$$

et, comme tous les sinus sont positifs

$$\lambda = \mu = \nu;$$

on a en outre

$$A' = A, \quad B' = B, \quad C' = C.$$

Ainsi les caractères des systèmes où les points circulaires à l'infini se conservent sont les suivants : 1° les triangles de référence sont semblables ; 2° les constantes λ, μ, ν sont égales à l'unité. Comme les points circulaires à l'infini sont souvent appelés les *ombilics du* *plan,* nous désignerons les systèmes précédents sous le nom de systèmes *ombilico-anallagmatiques.*

8. Les systèmes ombilico-anallagmatiques ont des propriétés remarquables.

Observons d'abord qu'en vertu des relations

$$XX' = YY' = ZZ',$$

la droite

$$Y = mX$$

se transforme en la droite

$$X' = mY',$$

c'est-à-dire que, si l'on faisait coïncider les angles égaux C et C', les droites correspondantes, passant par leurs sommets, seraient symétriquement placées par rapport à la bissectrice interne. Il résulte de là que l'angle de deux droites quelconques passant par un sommet quelconque C du triangle ABC est égal à l'angle des droites correspondantes qui passent par le sommet C' du triangle A'B'C'. En d'autres termes, les angles se conservent autour des trois sommets du triangle de référence.

Observons en second lieu qu'un cercle de la figure ABC ne se transformera en conique qu'autant qu'il passera par deux sommets du triangle ABC, par exemple par les points B et C. Mais, si cette condition est remplie, cette conique ne pourra être qu'un autre cercle passant par les points B' et C'. Les centres de tous les cercles passant par les points B et C, et les centres de tous les cercles correspondants passant par les points B' et C', forment évidemment deux divisions homographiques, le point à l'infini de chaque division ayant pour correspondant dans l'autre le centre du cercle circonscrit au triangle de référence. Si, en particulier, les deux triangles de référence sont égaux et confondus, les centres des cercles correspondants sont les couples de points d'une involution dont le centre est le centre du cercle circonscrit : ce dernier cas a été proposé comme exercice aux lecteurs des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, par M. Haton de la Goupillière.

Les points à l'infini de toute courbe prise dans la figure A′B′C′ correspondent aux points où la courbe correspondante coupe le cercle circonscrit au triangle ABC. Une droite de la figure ABC se transforme donc en hyperbole, en parabole ou en ellipse, suivant qu'elle coupe le cercle circonscrit au triangle ABC, qu'elle lui est tangente ou qu'elle ne le coupe pas. En général, soient R et S deux points où une courbe quelconque de la figure ABC coupe le cercle circonscrit au triangle ABC. Les points correspondants sont sur la droite de l'infini et sur les directions B′R′ et B′S′ qui correspondent respectivement à BR et BS. D'après le principe de la conservation des angles autour des sommets des triangles de référence, l'angle R′B′S′ est égal à l'angle RBS et l'angle des directions asymptotiques B′R′, B′S′ a pour mesure la moitié de l'arc RS.

Signalons encore ce fait. Les angles étant conservés autour de A et de A′, une division en involution sur une droite menée par B donnera une division en involution sur la droite correspondante menée par B′. Soit dès lors le théorème de Desargues. Les extrémités des cordes obtenues en coupant par une droite toutes les coniques qui passent par quatre points sont les points conjugués d'une même involution (*). De cet énoncé on déduit le théorème suivant. Si l'on a un système de courbes du quatrième ordre avec trois points doubles communs et

(*) On sait que le célèbre géomètre lyonnais n'a point énoncé ce théorème sous une forme aussi générale.

quatre points simples communs, toute sécante menée par un des points doubles donne des cordes dont les extrémités sont les points conjugués d'une même involution.

9. Soit une courbe quelconque d'ordre $2m$ avec trois points d'ordre m formant les sommets d'un triangle ABC. Prenons un triangle semblable $A'B'C'$ dans un même plan ou dans un plan différent, et considérons la transformation de figure ombilico-anallagmatique définie par les relations

$$XX' = YY' = ZZ'.$$

La courbe d'ordre $2m$ a pour transformée une courbe d'ordre m. Un foyer de la courbe d'ordre m est le point de rencontre de deux tangentes menées à cette courbe des points I' et J', ombilics du plan $A'B'C'$. A ce foyer correspond, dans la courbe d'ordre $2m$, le quatrième point de rencontre de deux coniques circonscrites au triangle ABC, tangentes à la courbe d'ordre $2m$ et passant respectivement par les points I et J, ombilics du plan ABC. Nous dirons que ce point est un *foyer secondaire* de la courbe d'ordre $2m$.

La transformation donne aussitôt le théorème suivant : *Une courbe d'ordre* $2m$ *et de classe* ν *ayant trois points d'ordre* m *admet* $(\nu - 2m)^2$ *foyers secondaires, parmi lesquels* $(\nu - 2m)$ *sont réels.*

Dans les courbes du quatrième ordre à trois points doubles il y a quatre foyers secondaires, dont deux réels et deux imaginaires. Les droites qui joignent un des points doubles aux deux foyers réels sont également inclinées sur les deux tangentes menées de ce point double à la courbe. Ce théorème résulte de la propriété analogue des foyers réels des coniques, en même temps que du principe de la conservation des angles autour des points A et A′.

On voit que tout théorème sur les foyers ordinaires d'une courbe d'ordre m donne un théorème sur les foyers secondaires de courbes d'ordre $2m$ ayant trois points d'ordre m. Donnons un exemple.

Si de deux points P et P′ on mène les tangentes à chaque conique d'un système (μ, ν), le lieu de leur intersection est une courbe d'ordre 3ν avec deux points d'ordre ν en P et P′. Ce théorème, presque évident, s'énonce comme il suit, lorsque les points P et P′ sont les ombilics I′ et J′ : *Le lieu des foyers des coniques d'un système* (μ, ν) *est une courbe d'ordre* 3ν *passant* ν *fois par les ombilics du plan.* En transformant ce théorème on obtient le suivant : *Dans un système de courbes du quatrième ordre à trois points doubles communs* (μ', ν'), *le lieu des foyers secondaires est une courbe d'ordre* $3(\nu' - 2\mu')$ *passant* $\frac{\nu' - 2\mu'}{2}$ *fois par les ombilics du plan et* $\frac{3}{2}(\nu' - 2\mu')$ *fois par chacun des points doubles.*

10. Imaginons une courbe quelconque du quatrième ordre ayant trois points doubles A, B, C. Prenons un triangle A′B′C′ semblable au triangle ABC, et faisons la transformation ombilico-anallagmatique définie par les relations

$$XX' = YY' = ZZ'.$$

La courbe se transforme en une conique S.

A l'axe de la conique S qui passe par les foyers réels correspond une conique réelle passant par les trois points doubles et par les foyers secondaires réels. Cette conique s'appellera un *axe secondaire* de la courbe du quatrième ordre. De même à l'axe de la conique S qui passe par les foyers imaginaires, correspond dans la courbe du quatrième ordre une conique réelle passant par les points doubles et par les foyers secondaires imaginaires. Cette conique s'appellera aussi un *axe secondaire* de la courbe du quatrième ordre.

Les deux axes de la conique S se coupent au centre. Le centre a donc pour point correspondant le quatrième point d'intersection de ces deux coniques menées par les points doubles, que nous avons appelées *axes secondaires*. Ce nouveau point sera appelé un *centre secondaire* de la courbe du quatrième ordre.

Les sommets de la conique S correspondent aux quatre points autres que les points doubles où la courbe du quatrième ordre est coupée par ses axes secondaires. Ces points seront les *sommets secondaires* de la courbe du quatrième ordre.

Les diamètres de la conique S se transforment en coniques passant par les trois points doubles et par le centre secondaire. On appellera ces coniques des *diamètres secondaires*.

La correspondance étant ainsi établie entre les éléments des deux figures, la transformation des théorèmes se fera sans difficulté.

Donnons un exemple : *Dans un système de coniques* (μ, ν) *le lieu des centres est d'ordre* ν. En transformant ce théorème, on obtient le suivant : *Dans un système de courbes du quatrième ordre à trois points doubles communs* (μ', ν'), *le lieu des centres secondaires est une courbe d'ordre* $\nu' - 2\mu'$ *ayant les points doubles pour points d'ordre* $\frac{1}{2}(\nu' - 2\mu')$.

11. Imaginons deux triangles, dont les sommets A et A′ sont confondus, ainsi que les sommets B et B′, tandis

que les sommets C et C' sont symétriques par rapport à la droite qui joint les deux autres. Nous compterons des angles autour des points A et B de $-\infty$ à $+\infty$. AB sera l'origine des premiers, BA celle des seconds. Le sens positif sera, pour les premiers, de AB vers AC, pour les seconds de BA vers BC. Soient α et β les angles géométriques CAB et CBA.

Pour passer d'un point M' de la figure A'B'C' au point correspondant M de la figure ABC, on fera tourner AM' de α autour de A et BM' de β autour de B. Pour le passage inverse, on fera tourner naturellement de $-\alpha$ et de $-\beta$. On a ainsi un système de transformation algébrique et du second ordre.

A tout point de A'B' correspond C, à tout point de B'C' correspond A, à tout point de A'C' correspond B, et inversement. Donc les triangles de référence sont ABC pour la figure M, et A'B'C' pour la figure M'.

Les triangles étant égaux, on aura un système ombilico-anallagmatique si à la droite de l'infini de la figure A'B'C' correspond le cercle circonscrit au triangle ABC, et inversement.

Or, soient A'R' et B'S' deux droites parallèles de la figure A'B'C', se coupant en H' sur la droite de l'infini. Pour avoir le point H qui correspond à H', on fait tourner A'R' et B'S' de α et de β. Soient AR et BS les nouvelles positions de ces droites, et H le point d'intersection de AR et de BS. Il est visible que l'angle AHB est égal à $(\alpha+\beta)$. Il est donc le supplément de l'angle C, et le point H est sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

Le système ombilico-anallagmatique que nous venons de définir offre quelque intérêt.

1° Il donne la description des coniques de Newton, permet de distinguer le genre de la conique suivant la position de la droite correspondante et donne une construction simple des asymptotes.

2° Il se prête facilement au calcul dans le système des coordonnées biangulaires, étudiées par M. William Walton (*).

Soit M′ un point du plan A′B′C′. Les coordonnées de ce point sont les angles B′A′M′ $= \varphi$ et A′B′M′ $= \psi$. Ces angles sont comptés de $-\infty$ à $+\infty$, comme il a été dit plus haut.

La courbe la plus générale d'ordre m est représentée par l'équation algébrique la plus générale de degré m entre $\cot\varphi$ et $\cot\psi$.

Partant de ce principe évident, on fera aisément la théorie de la droite, des directions asymptotiques, des centres, etc.

Pour nous borner à l'objet de notre étude, nous ferons remarquer que, si l'équation d'une courbe algébrique dans la figure A′B′C′ est

$$f(\cot\varphi,\ \cot\psi) = 0,$$

l'équation de la courbe transformée est simplement

$$f[\cot(\varphi + \alpha),\ \cot(\psi + \beta)] = 0.$$

(*A suivre.*)

(*) *The quarterly Journal of pure and applied Mathematics.*