

ÉDOUARD LUCAS

**Sur la résolution du système des équations  
 $2v^2 - u^2 = w^2$  et  $2v^2 + u^2 = 3z^2$  en  
nombres entiers**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 16  
(1877), p. 409-416

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1877\\_2\\_16\\_\\_409\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__409_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

**SUR LA RÉOLUTION DU SYSTÈME DES ÉQUATIONS**

$$2v^2 - u^2 = w^2 \quad \text{et} \quad 2v^2 + u^2 = 3z^2$$

**EN NOMBRES ENTIERS;**

**PAR M. ÉDOUARD LUCAS.**

---

Nous observerons d'abord qu'il est facile de ramener au système proposé la résolution de l'une des équations biquadratiques

$$4v^4 - u^4 = 3W^2 \quad \text{ou} \quad 9z^4 - w^4 = 8V^2,$$

et l'on a

$$W = wz \quad \text{et} \quad V = uv.$$

Nous supposons  $u, v, w, z$  entiers et premiers entre eux; nous tirons de la première équation du système proposé

$$\left(\frac{w+u}{2}\right)^2 + \left(\frac{w-u}{2}\right)^2 = v^2,$$

et, par les formules de résolution des triangles rectangles en nombres entiers,

$$(A) \quad u = a^2 - b^2 + 2ab, \quad w = a^2 - b^2 - 2ab, \quad v = a^2 + b^2;$$

les nombres  $a$  et  $b$  sont entiers et premiers entre eux, et  $u, w$  ont des signes arbitraires, afin de ne pas nuire à la généralité de la solution. En portant ces valeurs dans la seconde équation du système proposé, nous obtenons

$$(1) \quad 3(a^2 + b^2)^2 + 4ab(a^2 - b^2) = 3z^2.$$

Cette égalité montre que le produit

$$ab(a+b)(a-b)$$

est divisible par 3; mais, puisque  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, on peut, à cause de la symétrie, puisque la forme de l'équation ne change pas en remplaçant respectivement  $a$  et  $b$  par  $a+b$  et  $a-b$ , supposer

$$b = 3b'.$$

Alors l'équation (1) devient

$$(a^2 - 2ab' + 3b'^2)(a^2 + 6ab' + 27b'^2) = z^2;$$

mais  $z$  est impair, et les deux facteurs de  $z^2$  sont premiers entre eux; on a donc

$$\begin{aligned} a^2 - 2ab' + 3b'^2 &= z_1^2, \\ a^2 + 6ab' + 27b'^2 &= z_2^2, \\ z &= z_1 z_2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} (a - b')^2 + 2b'^2 &= z_1^2, \\ (a + 3b')^2 + 2(3b')^2 &= z_2^2. \end{aligned}$$

La décomposition en facteurs donne, pour la première équation,

$$(2) \quad a - b' = \pm (r^2 - 2s^2), \quad b' = 2rs,$$

et pour la seconde

$$(3) \quad a + 3b' = \pm (r'^2 - 2s'^2), \quad 3b' = 2r's'.$$

Il nous reste à identifier les valeurs de  $a$  et de  $b'$  tirées de chacune de ces équations, ce qui conduit aux quatre cas suivants :

*Premier cas.* — En prenant le signe + dans l'équation (2) et le signe — dans l'équation (3), on a

$$\begin{aligned} r^2 + 2rs - 2s^2 &= 2s'^2 - 2r's' - r'^2, \\ 3rs &= r's'. \end{aligned}$$

Posons

$$r' = 3mr \quad \text{et} \quad s = ms',$$

nous obtenons, par l'élimination de  $r'$  et de  $s$ , l'équation quadratique

$$m^2(9r^2 - 2s'^2) + 8rs'm + r^2 - 2s'^2 = 0.$$

Si nous exprimons que la valeur de  $m$  est rationnelle, il vient

$$36r^2s'^2 - 9r^4 - 4s'^4 = H^2,$$

équation impossible suivant le module 3.

*Deuxième cas.* — En prenant le signe — dans l'équation (2), et le signe + dans l'équation (3), on se trouve encore conduit à l'impossibilité précédente.

*Troisième et quatrième cas.* — En prenant, en même

temps, les signes supérieurs ou inférieurs dans les équations (2) et (3), nous arrivons aux relations

$$\begin{aligned} r^2 + 2rs - 2s^2 &= r'^2 - 2r's' - 2s'^2, \\ 3rs &= r's'. \end{aligned}$$

En posant encore

$$r' = 3mr \quad \text{et} \quad s = ms',$$

nous obtenons, comme ci-dessus, l'équation

$$m^2(9r^2 + 2s'^2) - 8rs'm = r^2 + 2s'^2.$$

Pour que la valeur de  $m$  tirée de cette équation soit rationnelle, on doit avoir

$$(3r^2 + 6s'^2)^2 - 32s'^4 = K^2,$$

et alors

$$m = \frac{-4rs' \pm K}{9r^2 + 2s'^2}.$$

On déduit, par la décomposition en facteurs,

$$\begin{aligned} 3r^2 + 6s'^2 \pm K &= 2p^4, \\ 3r^2 + 6s'^2 \mp K &= 16q^4, \\ s' &= pq; \end{aligned}$$

les nombres  $p$  et  $q$  sont entiers et premiers entre eux; on obtient ensuite, par addition et soustraction,

$$\begin{aligned} p^4 + 8q^4 &= 3r^2 + 6s'^2, \\ p^4 - 8q^4 &= \pm K. \end{aligned}$$

La première des équations précédentes peut être mise sous la forme

$$(p^2 - 3q^2)^2 - q^4 = 3r^2,$$

et, par une nouvelle décomposition en facteurs,

$$\left. \begin{aligned} p^2 - 2q^2 &= g^2, \\ p^2 - 4q^2 &= 3h^2, \\ r &= gh, \end{aligned} \right\} \text{ ou } \left\{ \begin{aligned} p^2 - 2q^2 &= -g^2, \\ p^2 - 4q^2 &= -3h^2, \\ r &= gh; \end{aligned} \right.$$

la première décomposition est impossible suivant le module 4, et la seconde conduit au système

$$\begin{aligned} 2q^2 - g^2 &= p^2, \\ 2q^2 + g^2 &= 3h^2, \end{aligned}$$

identique au système proposé.

Par conséquent, on résout complètement le système des équations

$$\begin{aligned} 2v^2 - u^2 &= w^2, \\ 2v^2 + u^2 &= 3z^2 \end{aligned}$$

par les formules

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= (r^2 + 8rs - 2s^2)^2 - 72r^2s^2, \\ \mathbf{V} &= (r^2 + 2rs - 2s^2)^2 + 36r^2s^2, \\ \mathbf{W} &= (r^2 - 4rs - 2s^2)^2 - 72r^2s^2, \\ \mathbf{Z} &= (r^2 + 2s^2)(2r^2 + 9s^2), \end{aligned}$$

dans lesquelles

$$\begin{aligned} r &= uz(2v^2w^2 + 9u^2z^2), \\ s &= vw[4uvwz \pm (w^4 - 8u^4)]. \end{aligned}$$

Ainsi la solution immédiate

$$u_0 = v_0 = w_0 = z_0 = \pm 1$$

donne ainsi

$$v_1 = 37, \quad w_1 = 47, \quad u_1 = 23, \quad z_1 = 3 \times 11;$$

en prenant le signe inférieur dans la valeur de  $s$ , on a ensuite

$$\begin{aligned} v_2 &= 40573, & w_2 &= 23183, \\ u_2 &= 52487, & z_2 &= 139 \times 323; \end{aligned}$$

puis la solution

$$\begin{aligned} v &= 2\,536\,422\,0918\,55129, \\ u &= 3\,586\,470\,3316\,69969, \\ w &= 6406\,72783\,29889, \\ z &= (9 \times 45\,97777)(11 \times 64\,33883), \end{aligned}$$

qui a été calculée et vérifiée par M. Alphonse Fiquet; on observera que ces solutions croissent très-rapidement.

On peut aussi résoudre le système proposé, par l'équation (1), d'une autre manière, au moyen de la décomposition que nous avons employée autrefois (1).

La solution précédente conduit encore à la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Le système des équations*

$$2v^3 - u^2 = w^4 \quad \text{et} \quad 2v^2 + u^2 = 3z^2,$$

a pour solution unique  $u = v = w = z = \pm 1$ .

En effet, l'équation (A) donne, en remplaçant  $w$  par  $w^2$ ,

$$a^2 - 6ab' - 9b'^2 = w^2,$$

car on ne peut supposer le second membre égal à un carré négatif. On tire de l'équation précédente

$$(4) \quad a - 3b' = \pm (e^2 + 2f), \quad 3b' = 2ef;$$

identifions les valeurs de  $a$  et de  $b'$  tirées des équations (2) et (4), nous obtenons, en prenant en même temps les signes supérieurs,

$$\begin{aligned} e^2 + 2ef + 2f^2 &= r^2 + 2rs - 2s^2, \\ ef &= 3rs. \end{aligned}$$

Posons encore

$$e = 3mr \quad \text{et} \quad s = mf,$$

nous arrivons à l'équation

$$m^2(9r^2 + 2f^2) - 4frm + 2f^2 - r^2 = 0.$$

Pour que la valeur de  $m$  soit rationnelle, on doit avoir l'équation

$$9r^4 - 12r^2f^2 - 4f^4 = R^2,$$

---

(\*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2<sup>e</sup> série, t. XV, p. 468; 1876.

dans laquelle on peut supposer  $r$  et  $f$  premiers entre eux.

On en tire

$$3r^2 - 2f^2 \pm R = \pm 2g^4,$$

$$3r^2 - 2f^2 \mp R = \mp 4h^4,$$

$$f = gh;$$

puis, par addition,

$$3r^2 = \pm (g^4 + 2h^4) + 2g^2h^2,$$

c'est-à-dire

$$3r^2 = (g^2 + h^2)^2 + h^4,$$

ou bien

$$-3r^2 = (g^2 - h^2)^2 + h^4;$$

ces deux dernières équations sont impossibles suivant le module 3; donc  $g = h = 0$ ; puis  $f = b' = 0$  et  $w = \pm 1$ .

En prenant les signes inférieurs dans les équations (2) et (4), on arrive aux mêmes conclusions; d'autre part, en prenant le signe — dans l'équation (2) et le signe + dans l'équation (4), on obtient

$$e^2 + 2f^2 = 2s^4 + 4rs - r^2,$$

et, comme précédemment,

$$4f^4 - 12f^2r^2 - 9r^4 = R^2,$$

équation impossible suivant le module 4, puisque  $r$  ne peut être pair; car, s'il en était autrement,  $a$  et  $b$  ne seraient pas premiers entre eux, comme l'équation (2) le fait voir.

Enfin, en prenant le signe + dans l'équation (2) et le signe — dans l'équation (4), on arrive aux mêmes résultats.

*Remarque I.* — Les équations

$$4v^4 - u^4 = 3w^4 \quad \text{et} \quad 9z^4 - w^4 = 8v^4$$

ne peuvent être vérifiées séparément que pour des valeurs égales des indéterminées.



*Remarque II.* — Le système des équations

$$x = u^2, \quad x + 1 = 2v^2, \quad 2x + 1 = 3z^2$$

a pour solution unique  $x = 1$ ; en effet, ce système donne

$$2v^2 - u^2 = 1^4 \quad \text{et} \quad 2v^2 + u^2 = 3z^2.$$