H. LAURENT

Théorie élémentaire des fonctions elliptiques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 16 (1877), p. 385-406

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__385_0>

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. H. LAURENT.

[SUITE (*).]

ÉTUDES DES PREMIÈRES TRANSCENDANTES QUE L'ON RENCONTRE DANS LE CALCUL INTÉGRAL.

Les fonctions entières s'intègrent immédiatement, les fonctions rationnelles s'intègrent en les décomposant en fractions simples : quand ces fractions simples sont de la forme $\frac{A}{(x-a)^m}$, elles s'intègrent immédiatement; quand elles sont de la forme $\frac{A}{x-a}$, elles ne s'intègrent plus au moyen de signes algébriques, ou du moins on ne sait plus les intégrer de cette façon.

On rencontre aussi des fractions de la forme

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n};$$

mais, en adoptant les imaginaires dans le calcul, ces fractions se réduisent à la forme $\frac{A}{(x-a)^n}$.

L'intégrale de $\frac{A}{x-a}$ est une fonction logarithmique bien étudiée dans les éléments et bien connue; on conçoit cependant que la découverte des logarithmes ait pu suivre celle du Calcul intégral, et il est intéressant de voir comment on aurait pu étudier les propriétés de la nouvelle fonction.

(*) *Nouvelles Annales*, 2e serie, t. XVI, p. 78, 211, 361.

Et d'abord il y a lieu de se demander si l'intégrale de $\frac{A}{x-a}$ engendre réellement une fonction transcendante, ou seulement une fonction réductible aux fonctions algébriques; nous allons voir, en étudiant ses propriétés, qu'elle constitue une fonction nouvelle. D'abord, en mettant à part le facteur A constant et remplaçant $x-a$ par x, on ramène cette intégrale à la forme

$$\int \frac{dx}{x}.$$

Posons

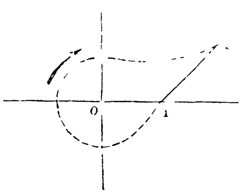
$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \log x,$$

le signe log étant employé pour représenter la nouvelle fonction (nous précisons notre intégrale avec la limite 1 et non zéro, afin qu'elle reste finie).

Nous pouvons prouver : 1° que $\log x$ n'est pas monodrome et par suite ne peut pas être rationnel; 2° que $\log x$ a une infinité de valeurs pour une même valeur de x, et qu'il ne saurait alors coïncider avec une fonction algébrique qui n'en a qu'un nombre limité.

Pour le prouver, observons que l'on peut aller du point 1 au point x, soit directement par le chemin $1x$

Fig. 7.



rectiligne, ce qui fournit la valeur que nous appellerons $\log x$, soit par tout autre chemin. La valeur de l'intégrale prise le long d'un chemin qui, avec $x1$, forme un contour fermé ne contenant pas l'origine où $\frac{1}{x}$ est infini, donnerait la même valeur $\log x$; mais si, pour aller de 1 à x, on suit un chemin qui enveloppe le point o, tel que celui qui est figuré en pointillé, l'intégrale prise le long de ce contour, augmentée de l'intégrale prise le long de $x1$, sera égale à l'intégrale prise le long d'un cercle de rayon très-petit décrit autour du point o; on aura donc, en se rappelant que cette dernière est égale à $\pm 2\pi\sqrt{-1}$,

$$\int \frac{dx}{x} - \log x = -2\pi\sqrt{-1};$$

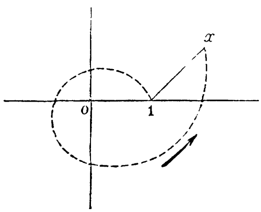
Je mets $-2\pi\sqrt{-1}$, parce que l'intégrale doit être prise dans le sens rétrograde; on a donc dans ce cas

$$\int \frac{dx}{x} = \log x - 2\pi\sqrt{-1}.$$

Si, au contraire, la figure avait la disposition ci-dessous, on aurait

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + 2\pi\sqrt{-1}.$$

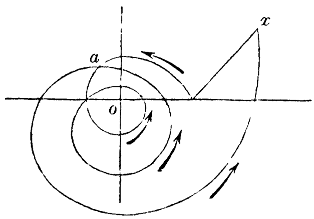
Fig. 8.



Il y a plus, si, au lieu de suivre un contour simple comme les deux précédents, on suit un contour entourant 2, 3, 4, ... fois l'origine, tel que celui ci-dessous qui l'entoure trois fois, il est clair que l'on aura

$$\int \frac{dx}{x} \log x + 2, 4, 6 \ldots \pi\sqrt{-1};$$

Fig. 9.



dans le cas de la figure, on a

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + 6\pi\sqrt{-1}.$$

Ainsi la valeur générale de l'intégrale considérée est

$$\log x \pm 2k\pi\sqrt{-1},$$

k désignant un entier, et ces valeurs de $\log x$ sont inséparables les unes des autres; ainsi, quand le point x passe en a pour la seconde fois, l'intégrale y acquiert une valeur égale à la précédente augmentée de 2π, et cela en *vertu de la continuité;* en d'autres termes, on ne pourrait assigner à $\log x$ une valeur déterminée en a qu'en rompant la continuité de cette fonction.

Si l'on considère l'équation

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0,$$

on en tire d'abord

$$\int_1^x \frac{dx}{x} + \int_1^y \frac{dy}{y} = \text{const.},$$

ce que l'on peut écrire

$$(1) \qquad \log x + \log y = \log a,$$

a désignant une constante. Mais on en tire aussi

$$y\,dx + x\,dy = 0,$$

ou

$$(2) \qquad xy = b,$$

b désignant une constante. Les formules (2) devant être identiques, faisons $x = 1$; (1) donnera $\log y = \log a$ et (2) donnera $y = b$, ce qui exige que $a = b$. Des formules (1) et (2) on tire alors, en remplaçant b par a,

$$\log x + \log y = \log xy,$$

ce qui est la propriété fondamentale de la fonction logarithmique.

La fonction inverse de $\log x$ sera représentée par $e(x)$, en sorte que, si

$$y = \log x,$$

on aura

$$x = e(y);$$

la propriété fondamentale des logarithmes donne la propriété fondamentale des exponentielles

$$e(x + y) = e(x) - e(y),$$

ce qui conduit à écrire

$$e(x) = e^x,$$

et comme l'on a

$$\log x = y + 2k\pi\sqrt{-1},$$

y désignant l'une des valeurs de $\log x$. on a

$$e^x = e^{x+2k\pi\sqrt{-1}};$$

la fonction e^x est alors périodique et a pour période

$2k\pi\sqrt{-1}$. De la formule

$$dy = \frac{dx}{x}$$

on tire

$$\frac{dx}{dy} = x.$$

y étant le logarithme de x, on voit que la dérivée de la fonction exponentielle e^y prise par rapport à y est cette fonction elle-même ; on est alors conduit à représenter e^x au moyen d'une série, et sa théorie s'achève comme dans les éléments.

On voit ainsi que la découverte de Neper eût été faite par les inventeurs du Calcul infinitésimal dès les débuts du calcul inverse.

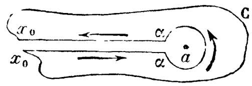
DES DIVERS CHEMINS QUE PEUT SUIVRE LA VARIABLE DANS LA RECHERCHE DES INTÉGRALES DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES.

Toute fonction algébrique y étant monodrome à l'intérieur d'un contour ne contenant pas de point critique, son intégrale sera nulle le long d'un pareil contour ; donc :

1° L'intégrale prise le long d'un contour quelconque $x_0 x$ pourra être remplacée par l'intégrale prise le long du contour rectiligne $x_0 x$, si entre ce contour et le contour donné il n'existe pas de point critique.

2° Si, à l'intérieur du contour C formé par le chemin rectiligne et le chemin donné, il existe un point critique a, on pourra remplacer le chemin donné par un autre allant de x_0 vers un point α très-voisin du point critique sans sortir du contour C, tournant ensuite le long du cercle décrit de a comme centre avec αa pour rayon, revenant en α, puis en x_0 par le chemin αx_0 inverse du chemin $x_0\alpha$ suivi tout à l'heure, enfin allant par le chemin rectiligne de x_0 à x. En effet, le nouveau chemin et l'ancien ne comprennent entre eux aucun point critique.

Fig. 10.



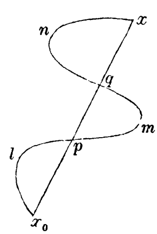
Le chemin formé d'une ligne allant de x_0 au point α voisin du point critique a, tournant autour de ce point et revenant en x_0 par la route déjà suivie pour aller de x_0, est ce que l'on appelle un *lacet*.

Nous avons figuré ci-dessus un lacet en séparant l'aller du retour pour bien montrer comment le lacet peut se substituer au contour C.

3° Si, entre le contour C formé par le chemin rectiligne et le contour donné, il existait plusieurs points critiques, on pourrait remplacer ce contour par une série de lacets suivis de la droite x_0x.

4° Supposons que le contour d'intégration donné rencontre la droite x_0x_1 en p, q.

Fig. 11.



On pourra remplacer le chemin xlp par une série de lacets et par la droite x_0p; on est alors ramené au chemin x_0pmq, que l'on peut remplacer par une série de lacets suivis de xq, et ainsi de suite; donc :

THÉORÈME. — *Tous les chemins que l'on peut suivre pour aller de x_0 en x peuvent être remplacés par une série de lacets ayant leurs origines et leurs extrémités en x_0, suivis du contour rectiligne x_0x* (*).

Nous dirons qu'un lacet unit deux valeurs y_i et y_j quand ces deux valeurs de y se permutent l'une dans l'autre lorsque l'on suit ce lacet.

Mais nous préciserons encore davantage : en général, en suivant un lacet, on ne permute que deux valeurs de la fonction y; toutefois il pourra se faire qu'en suivant un même lacet plusieurs fois de suite, on obtienne une permutation circulaire des valeurs $y_1, y_2, y_3, \ldots$ de y; nous considérerons comme distincts tous les lacets parcourus avec des valeurs initiales différentes de y. Ainsi, par exemple, si le point a est un point critique ordinaire, deux racines y_i et y_k se permuteront l'une dans l'autre en parcourant ce lacet; nous le supposerons double, mais seulement pour la commodité du langage, en sorte que, s'il est parcouru avec la valeur initiale y_i, nous le considérerons comme formant un premier lacet unissant y_i à y_k, et s'il est parcouru avec la valeur initiale y_k, nous le considérerons comme un second lacet distinct du premier et unissant y_k à y_i.

De même, si au point a trois valeurs y_i, y_j, y_k se permutaient entre elles, on aurait à considérer le lacet correspondant comme triple : l'un des lacets simples unirait y_i à y_j et serait parcouru avec la valeur initiale y_i, et

(*) Il va sans dire que nous supposons que le chemin rectiligne x_0x ne rencontre pas de point critique. S'il en rencontrait un, ce qui n'arrivera que dans des cas tout particuliers, il faudrait, pour l'exactitude du théorème, éviter ce point en déformant le contour rectiligne.

ainsi de suite. Ainsi, au mot *lacet* est attachée l'idée d'un chemin et l'idée d'une valeur initiale de y bien déterminée.

DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES.

Dès les débuts du Calcul intégral, on est arrêté par des difficultés insurmontables quand on veut calculer la fonction dont la dérivée dépend d'un radical carré recouvrant un polynôme du degré supérieur au second. Cette difficulté provient de ce que la fonction cherchée dépend de nouvelles transcendantes irréductibles, comme l'a prouvé M. Liouville, aux transcendantes étudiées dans les *Éléments* ou aux fonctions algébriques. Legendre, qui soupçonnait cette irréductibilité, s'est surtout attaché à étudier les propriétés analytiques des transcendantes les plus simples auxquelles conduit le Calcul intégral, et a créé la théorie des fonctions elliptiques.

On donne le nom d'*intégrales elliptiques* à des intégrales de forme simple, auxquelles on peut ramener les intégrales de la forme

$$V = \int F(x, y)\, dx, \tag{1}$$

où $F(x, y)$ désigne une fonction rationnelle de x et de y, et où y représente un radical de la forme

$$y = \sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E},$$

A, B, C, D, E désignant des coefficients constants. Nous supposerons le polynôme placé sous le radical décomposé en facteurs, et nous aurons

$$y = \sqrt{G(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)},$$

G désignant un nombre quelconque réel ou imaginaire.

On simplifie la formule (1) en posant

$$x = \frac{a + b\xi}{1 + \xi},$$

on trouve alors

$$V = \int \Phi(\xi, \eta)\, d\xi, \tag{2}$$

$\Phi(\xi, \eta)$ désignant une fonction rationnelle de ξ et de η, et η désignant le radical

$$y = \sqrt{G[a - \alpha + (b - \alpha)\xi][a - \beta + (b - \beta)\xi]\ldots}$$

Les puissances paires de ξ sous le radical disparaîtront si l'on pose

$$(a - \alpha)(b - \beta) + (a - \beta)(b - \alpha) = 0,$$
$$(a - \gamma)(b - \delta) + (a - \delta)(b - \gamma) = 0;$$

d'où l'on tire

$$2ab - (a + b)(\alpha + \beta) + 2\alpha\beta = 0,$$
$$2ab - (a + b)(\gamma + \delta) + 2\gamma\delta = 0,$$

ou

$$ab = \frac{\alpha\beta(\gamma + \delta) - \gamma\delta(\alpha + \beta)}{\alpha + \beta - \gamma - \delta},$$

$$a + b = \frac{2\alpha\beta - 2\gamma\delta}{\alpha + \beta - \gamma - \delta}.$$

Ces équations montrent que a et b sont racines d'une équation du second degré facile à former. On pourra donc toujours supposer que la quantité placée sous le radical η ne contient que le carré et la quatrième puissance de la variable ξ.

Cette transformation semble tomber en défaut quand on a $\alpha + \beta - \gamma - \delta = 0$; mais alors on a

$$y = \sqrt{G[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta][x^2 - (\alpha + \beta)x + \gamma\delta]},$$

et il suffit de poser

$$x - \frac{\alpha + \beta}{2} = \xi$$

pour faire disparaître les puissances impaires de la variable.

Remarque I. — Il est bon d'observer que, si le produit $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta)$ est réel, les quantités a et b pourront toujours être supposées réelles; en effet, la condition de réalité des racines de l'équation du second degré qui fournit a et b est

$$(\alpha\beta - \gamma\delta)^2 - [\alpha\beta(\gamma + \delta) - \gamma\delta(\alpha + \beta)]^2 > 0.$$

Le premier membre de cette égalité s'annule pour $\alpha = \gamma$, $\alpha = \delta$, $\beta = \gamma$, $\beta = \delta$, et l'on constate facilement qu'il est égal à $(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)(\beta - \delta)$. Il est donc réel si α, β, γ, δ sont réels. Il est encore réel si, ce que l'on peut supposer, α et β sont conjugués, et si γ et δ sont réels ou conjugués. Ainsi donc on peut toujours supposer a et b réels si

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta)$$

est un polynôme à coefficients réels.

Remarque II. — Si le polynôme placé sous le radical y n'était pas décomposé en facteurs, en remplaçant x par $\dfrac{a + b\xi}{1 + \xi}$ et en annulant les coefficients de ξ et ξ^3 sous le radical, on obtiendrait la même simplification.

Remarque III. — Si l'on avait

$$y = \sqrt{G(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)},$$

en posant

$$x - \alpha = \xi^2,$$

on trouverait

$$V = \int \Phi(\eta, \xi)\, d\xi,$$
$$\eta = \sqrt{G(\xi^2 + \alpha - \beta)(\xi^2 + \alpha - \gamma)},$$

Φ désignant une fonction rationnelle de ξ et de η.

Ainsi toute intégrale telle que V, dans laquelle y désigne un radical carré recouvrant un polynôme du troisième ou du quatrième degré, peut être ramenée à la forme

$$V = \int \Phi(x, y)\, dx,$$

y désignant un radical de la forme

$$\sqrt{G(1 + mx^2)(1 + nx^2)},$$

m et n désignant des constantes, et il est clair qu'en posant

$$\xi = x\sqrt{-m}, \quad k^2 = -\frac{n}{m},$$

on pourra ramener le radical à la forme

$$\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}.$$

Posant alors

$$y = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)},$$

les intégrales que nous nous proposons d'étudier prendront la forme

$$V = \int F(x, y)\, dx,$$

F désignant toujours une fonction rationnelle. Nous verrons par la suite que la quantité k^2, à laquelle on a donné le nom de *module*, peut toujours être censée réelle et moindre que l'unité.

RÉDUCTION DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES A DES TYPES SIMPLES.

Reprenons l'intégrale

$$(1) \qquad V = \int F(x, y)\, dx,$$

dans laquelle nous avons vu que l'on pouvait supposer

$$y = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)},$$

$F(x, y)$ peut toujours être mis sous la forme $\dfrac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)}$, φ et ψ désignant deux fonctions entières de x et y; mais une fonction entière de x et de y peut toujours être censée du premier degré en y, car y^2 est une fonction entière de x, y^3 est le produit de y par une fonction entière de x, etc. On peut donc poser

$$F(x, y) = \frac{A + By}{C + Dy},$$

A, B, C, D désignant des polynômes entiers en x.

Si l'on multiplie les deux termes de cette fraction par $C - Dy$, elle prend la forme

$$F(x, y) = M + Ny,$$

M et N désignant deux fonctions rationnelles de x, et comme $Ny = \dfrac{Ny^2}{y}$, on peut encore écrire

$$F(x, y) = M + \frac{P}{y},$$

P désignant une nouvelle fonction rationnelle de x; la formule (1) donne alors

$$V = \int M\, dx + \int P \frac{dx}{y}.$$

La première intégrale s'obtient par des procédés bien connus et peut s'exprimer au moyen des logarithmes et des fonctions rationnelles. Il reste alors à étudier les intégrales de la forme

$$(2)\qquad U = \int P\frac{dx}{y}.$$

Je dis que l'on peut toujours supposer qu'il n'entre dans l'expression de P que des puissances paires de x; en effet, on peut poser

$$P = \frac{H + Kx}{I + Lx},$$

H, K, I, L désignant des polynômes de degré pair en x, et, par suite, on a

$$P = \frac{(H + Kx)(I - Lx)}{I^2 - L^2x^2}:$$

P peut donc être censé de la forme

$$\frac{M + Nx}{S},$$

M, N, S désignant des polynômes de degré pair. La formule (2) donne alors

$$U = \int\frac{M}{S}\frac{dx}{y} + \int\frac{N}{S}x\frac{dx}{y}.$$

La seconde intégrale, en posant $x^2 = z$, prend la forme

$$\int f(z)\frac{dz}{\sqrt{(1-z)(1-k^2z)}},$$

où $f(z)$ est rationnel en z; elle pourra donc s'obtenir par les procédés enseignés dans les *Éléments du Calcul intégral*. Il ne reste donc plus qu'à s'occuper des intégrales de la forme (2), dans lesquelles P ne contient que des puissances paires de x.

La fonction P, étant décomposée en éléments simples, se composera de termes de la forme Ax^{2m} et $\frac{A}{x^2-a^2}$, A et a désignant des constantes, et l'intégrale U se composera elle-même de termes réductibles aux formes

$$u=\int \frac{x^{2m}}{y}\,dx, \quad v=\int \frac{dx}{(x^2-a^2)y}.$$

L'intégrale u peut encore se simplifier, et l'on peut toujours supposer $m=0$ ou $m=1$: il suffit pour cela d'observer que l'on a

$$d\left[x^{2m-3}\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\right]=\frac{ax^{2m}+bx^{2m-2}+cx^{2m-4}}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,dx,$$

a, b, c désignant des constantes que l'on déterminera en faisant les calculs indiqués; on en conclut la formule de réduction

$$x^{2m-3}y=a\int \frac{x^{2m}}{y}\,dx+b\int \frac{x^{2m-2}}{y}\,dx+c\int \frac{x^{2m-4}}{y}\,dx,$$

qui permettra de calculer $\int \frac{x^{2m}}{y}\,dx$ de proche en proche, quand on connaîtra

$$\int \frac{dx}{y} \quad \text{et} \quad \int \frac{x^2\,dx}{y};$$

il suffira pour cela d'y faire successivement

$$m=2,3,\ldots.$$

DES TRANSCENDANTES DE LEGENDRE ET DE JACOBI.

En définitive, les intégrales de la forme

$$\int F(x,y)\,dx,$$

où F désigne une fonction rationnelle de x et d'un radical carré recouvrant un polynôme du quatrième degré, peuvent se calculer au moyen des fonctions algébriques, logarithmiques, circulaires, et au moyen de trois transcendantes nouvelles :

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-a^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

ou

$$\int \frac{dx}{(1-ax^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

La première est, comme on le verra, la plus importante : ce sont les trois *intégrales elliptiques* de première, de deuxième et de troisième espèce.

Legendre pose $x = \sin\varphi$; les trois intégrales précédentes deviennent alors, en prenant pour limites inférieures zéro,

$$\int_0^\varphi \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

$$\frac{1}{k^2}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \frac{1}{k^2}\int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

et

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1-a\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};$$

la première était pour Legendre l'intégrale de première espèce, l'intégrale $\int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$ était l'intégrale de deuxième espèce, la troisième était l'intégrale de troisième espèce. L'intégrale de deuxième espèce représente l'arc d'ellipse exprimé en fonction de l'anomalie excentrique de son extrémité.

φ est ce que Legendre appelait l'*amplitude* des trois intégrales, k porte le nom de *module*, a est le *paramètre* de l'intégrale de troisième espèce.

Legendre, dans son *Traité des fonctions elliptiques*, étudie surtout les propriétés des trois intégrales que nous venons de signaler, et indique le moyen d'en construire des Tables. Mais Abel et Jacobi, se plaçant à un point de vue beaucoup plus élevé, ont considéré les intégrales elliptiques comme des fonctions inverses; pour bien faire saisir la pensée qui a guidé ces géomètres dans leurs recherches, nous ferons observer que les logarithmes et les fonctions circulaires inverses pourraient être définies par les formules

$$\log x = \int_1^x \frac{dr}{x}, \quad \arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \ldots,$$

et auraient certainement été étudiées avant l'exponentielle, le sinus, etc., si ces fonctions *directes* n'avaient pas été fournies par des considérations élémentaires. Le fil de l'induction devait laisser penser que l'intégrale

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}$$

ne définissait pas une fonction aussi intéressante que son inverse.

ÉTUDE DE L'INTÉGRALE $\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}}$.

Avant d'étudier la fonction elliptique, il convient, pour la commodité de l'exposition, d'étudier l'intégrale un peu plus générale

$$x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(y - \alpha)(y - \beta)(y - \gamma)(y - \delta)}};$$

x est une fonction évidemment continue de y, tant que y n'est égal à aucune des quantités α, β, γ, δ, ∞, et réciproquement y sera une fonction continue de x; il y a plus, lors même que y passe par la valeur α par exemple, x reste continu. En effet, posant $x = f(y)$, on a

$$f(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{dy}{\sqrt{y-\alpha}} \frac{1}{\sqrt{(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}}:$$

cette expression est finie comme l'on sait; on a aussi

$$f(\alpha+h) = \int_0^{\alpha+h} \frac{dy}{\sqrt{y-\alpha}} \frac{1}{\sqrt{(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}},$$

et, par suite,

$$f(\alpha+h) - f(\alpha)$$
$$= \int_\alpha^{\alpha+h} \frac{dy}{\sqrt{y-\alpha}} \frac{1}{\sqrt{(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}};$$

soient M une quantité dont le module reste supérieur à celui de $\frac{1}{\sqrt{(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}}$, ε une quantité dont le module est au plus égal à 1, on aura

$$f(\alpha+h) - f(\alpha) = \mathrm{M}\varepsilon \int_\alpha^{\alpha+h} \frac{dy}{\sqrt{y-\alpha}} = 2\mathrm{M}\varepsilon(\sqrt{\alpha+h} - \sqrt{\alpha});$$

cette quantité est bien infiniment petite. Ainsi :

Théorème I. — *La fonction x et, par suite, son inverse y sont continues, excepté quand y ou x sont infinis.*

Pour bien préciser le sens de la fonction x, il faut supposer que, pour $y = 0$, le radical ait une valeur bien déterminée, que nous représenterons par $+\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}$, et quand je dis que, pour $y = 0$, le radical a cette valeur, j'entends par là que l'intégrale est engendrée avec cette valeur initiale du radical qui pourra prendre au point o la valeur $-\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}$ quand la variable y reviendra en ce point. Cela posé,

Théorème II. — *La fonction y admet deux périodes.*

En effet, les contours que l'on peut suivre pour engendrer l'intégrale x peuvent se ramener : 1° au contour rectiligne oy allant du point o au point y; 2° à ce contour précédé de contours fermés aboutissant en o et formés de lacets.

Soient A, B, C, D les valeurs que prend l'intégrale autour des lacets relatifs aux points α, β, γ, δ respectivement.

Appelons i la valeur que prend l'intégrale x quand le chemin que suit la variable y est le contour rectiligne oy ; x pourra prendre les valeurs suivantes :

1° La valeur i;

2° Les valeurs $\pm A - i$, $\pm B - i$, $\pm C - i$, $\pm D - i$.

En effet, par exemple, la variable y parcourant d'abord le lacet A dans le sens direct ou dans le sens rétrograde, x prend la valeur $\pm A$, le radical revient en o avec sa valeur primitive changée de signe, la variable décrivant ensuite le chemin oy, l'intégrale prend le long de ce chemin la valeur $-i$, et l'intégrale totale se réduit à $\pm A - i$.

3° En général, quel que soit le sens dans lequel on parcourt un lacet, la valeur de l'intégrale ne dépend que du signe du radical à l'entrée du lacet, et ce signe change à la sortie du lacet; il en résulte que, si la valeur initiale du radical est précédée du signe $+$, la valeur générale de x sera

$$A - B + C - D + \ldots \pm i,$$

le signe de i étant $+$ s'il est précédé d'un nombre pair de termes, $-$ s'il est précédé d'un nombre impair de termes; de sorte que, si l'on pose

$$\begin{aligned}P = m_1(A - B) + m_2(A - C) + m_3(A - D)\\ + m_4(B - C) + m_5(B - D) + m_6(C - D),\end{aligned}$$

$m_1, m_2, \ldots, m_6$ étant des entiers positifs ou négatifs, les valeurs de x seront de la forme

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{lll} P + i, & P + A - i, & P + B - i, \\ & P + C - i, & P + D - i, \end{array}\right.$$

que l'on peut simplifier. En effet, si l'on intègre

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}}$$

le long d'un cercle de rayon infini décrit de l'origine comme centre, on obtient un résultat nul, mais cette intégrale est aussi égale, en vertu du théorème de Cauchy, à la somme des intégrales prises successivement le long des quatre lacets; donc

$$A - B + C - D = 0,$$

et si l'on pose

$$A - B = \omega, \quad B - C = \varpi,$$

on aura

$$\begin{gathered}B = A - \omega, \quad C = A - \omega - \varpi, \quad D = A - B + C = A - \varpi,\\ A - B = \varpi, \quad A - C = \omega + \varpi, \quad A - D = \varpi,\\ B - C = \varpi, \quad B - D = \varpi - \omega, \quad C - D = -\omega.\end{gathered}$$

La quantité P est donc de la forme $m\omega + n\varpi$, et les diverses valeurs de x de la forme

$$m\omega + n\varpi + i \quad \text{ou} \quad m\omega + n\varpi + A - i.$$

Les quantités m et n désignant des entiers quelconques, il résulte de là que, si l'on fait $y = f(x)$, on aura

$$(4)\quad f(m\omega + n\varpi + i) = f(m\omega + n\varpi + A - i) = f(i);$$

la fonction y admet donc les deux périodes ω et ϖ.

Si nous partageons le plan en une infinité de parallélogrammes, dont les côtés soient ω et ϖ, ces parallélogrammes porteront le nom de *parallélogrammes des périodes*, et nous pourrons énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Dans chaque parallélogramme des périodes, la fonction y prend deux fois la même valeur pour deux valeurs distinctes de x.*

On peut démontrer directement que la fonction y est monodrome dans toute l'étendue du plan. En effet, si le point y se meut dans une portion du plan qui ne contient pas des points critiques, x reste fonction monodrome de y, et l'équation

$$(A)\quad \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}} - x = 0$$

fournit une série de valeurs de x comprises dans un certain contour C. Réciproquement, la racine y de cette équation ne pourra cesser d'être monodrome qu'autour des points où y acquerrait des valeurs multiples ou autour desquels le premier membre de l'équation cesserait d'être monodrome ou fini par rapport à y; or, la dérivée du premier membre de notre équation relative à y ne s'annule que pour $y = \infty$; les seuls points où y pourrait cesser d'être monodrome correspondent donc à $y = \alpha, \beta, \gamma, \delta$ et ∞.

Posons donc

$$y = \alpha + z^2,$$

$$\frac{dy}{dx} = 2z\frac{dz}{dx};$$

la formule (A) deviendra

$$\int_{\sqrt{\alpha}}^{z} \frac{z\,dz}{\sqrt{(z^2+\alpha-\beta)(z^2+\alpha-\gamma)(z^2+\alpha-\delta}} - x = 0.$$

La fonction z ne cesse évidemment pas d'être monodrome autour du point $z = 0$, et, par suite, y ne cesse pas d'être monodrome autour du point α (α, β, γ sont, bien entendu, supposés différents les uns des autres).

Si l'on veut étudier ce qui se passe autour du point $x = \xi$, pour lequel $y = \infty$, on posera

$$y = \frac{1}{z};$$

on aura alors, au lieu de la formule (A),

$$\int_{\infty}^{z} \frac{dz}{\sqrt{(1-\alpha z)(1-\beta z)(1-\gamma z)(1-\delta z)}} - x = 0,$$

et, en raisonnant comme plus haut, on voit que cette équation, pour $y = \infty$ ou pour $z = 0$, ne cesse pas d'être monodrome par rapport à x.

Nous verrons plus loin une démonstration lumineuse de ces résultats, mais il était nécessaire de présenter ces considérations pour faire comprendre l'esprit qui nous guide dans nos recherches.

Notre but dans ce paragraphe était de montrer comment on pouvait être conduit à concevoir des fonctions possédant deux périodes

(*A suivre.*)