

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 16
(1877), p. 326-334

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__326_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DE QUESTIONS
PROPOSEES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

Question 1224

(voir p 191)

PAR M. MORET-BLANC.

Soit une famille de courbes planes représentées par l'équation $f(x, y, \alpha) = 0$, α étant un paramètre variable; trouver :

1° Le lieu des points où la tangente est parallèle à une droite donnée;

2° Le lieu des points où le rayon de courbure a une grandeur donnée.

Applications aux paraboles de même axe et de même sommet, aux ellipses ayant un axe commun.

(LAISANT.)

1° Soit m le coefficient angulaire de la direction donnée. On obtiendra le lieu des points où la tangente est

parallèle à cette direction, en éliminant le paramètre variable α entre les équations

$$(1) \quad f(x, y, \alpha) = 0,$$

$$(2) \quad f'_x(x, y, \alpha) + m f'_y(x, y, \alpha) = 0.$$

2° Soit R la valeur donnée du rayon de courbure ; on obtiendra le lieu des points où il a cette valeur en éliminant α entre l'équation (1) et

$$(3) \quad \pm \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = R,$$

où $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ ont les valeurs déduites de l'équation (1).

Application aux paraboles du même axe et de même sommet.

Les équations sont alors

$$(1) \quad y^2 - 2\alpha x = 0,$$

$$(2) \quad my - \alpha = 0,$$

$$(3) \quad \pm \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{\alpha^2} = R.$$

L'élimination de α entre les deux premières donne

$$y(y - 2mx) = 0.$$

La solution $y = 0$ correspond au cas limite où, le paramètre devenant nul, la parabole se réduit à deux droites coïncidentes $y^2 = 0$, que toute droite coupe en deux points coïncidents.

La solution $y = 2mx$ correspond aux vraies paraboles.

Ce résultat pouvait être prévu sans calcul : en effet, les paraboles de même axe et de même sommet sont homothétiques, et le sommet est le centre d'homothétie ; les points homologues, où les tangentes sont parallèles, sont donc sur une droite passant par le sommet, et dont le coefficient angulaire est double de celui des tangentes, puisque la sous-tangente est double de l'abscisse.

L'élimination de α entre les équations (1) et (3) donne

$$(y^2 + 4x^2)^3 = 4R^2 x^2 y^2,$$

ou, en coordonnées polaires,

$$r^2 (1 + 3 \cos^2 \theta)^3 = R^2 \sin^2 2\theta,$$

équation du lieu des points où le rayon de courbure est égal à R . La courbe étant symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées rectangulaires, il suffit de considérer

$$r = \frac{R \sin 2\theta}{(1 + 3 \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}}},$$

en faisant varier θ de zéro à $\frac{\pi}{2}$.

r s'annule pour $\theta = 0$ et pour $\theta = \frac{\pi}{2}$. En égalant sa dérivée à zéro, on obtient, pour déterminer la valeur de θ , qui rend le rayon vecteur maximum,

$$\tan^4 \theta - 6 \tan^2 \theta - 4 = 0,$$

d'où

$$\tan^2 \theta = 3 + \sqrt{13}, \quad \theta = 68^\circ 44' 23''.$$

La valeur maximum de r est sensiblement $r = 0,41R$.

La courbe est donc une rosace à quatre feuilles disposées symétriquement par rapport aux axes, mais non symétriques par rapport au rayon vecteur maximum.

Application aux ellipses ayant un axe commun.

Les équations sont, dans ce cas,

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} - 1 = 0,$$

$$(2) \quad \frac{x}{a^2} + m \frac{y}{\alpha^2} = 0,$$

$$(3) \quad \frac{(a^4 y^2 + \alpha^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{\alpha^4 \alpha^4} = R.$$

L'élimination de α entre les deux premières donne

$$xy - mx^2 + ma^2 = 0.$$

Cette équation, étant indépendante du signe de b^2 , convient aussi aux hyperboles ayant pour axe transverse l'axe donné. C'est une hyperbole ayant pour asymptotes les droites $x = 0$, $y = mx$. La partie de la courbe comprise entre les abscisses $x = +a$ et $x = -a$ correspond aux ellipses, et le reste de la courbe aux hyperboles.

Si l'on élimine α entre les équations (1) et (3), on obtient

$$[(a^2 - x^2)^2 + x^2 y^2]^3 = a^4 R^2 (a^2 - x^2)^2 y^2,$$

équation du lieu des points des ellipses et des hyperboles

$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{\alpha^2} - 1 = 0$, où le rayon de courbure est égal à R .

C'est une courbe symétrique par rapport aux axes.

L'équation développée

$$(4) \quad \begin{cases} x^6 y^6 + 3(a^2 - x^2)^2 x^4 y^4 + (a^2 - x^2)^2 \\ \times [3x^2(a^2 - x^2)^2 - a^4 R^2] y^2 + (a^2 - x^2)^6 = 0 \end{cases}$$

est du troisième degré en y^2 ; l'une des racines est négative, sauf pour $x^2 = a^2$, où les trois valeurs de y^2 sont

nulles : les extrémités de l'axe donné sont donc des points sextuples.

Pour $x = 0$, les trois valeurs de y^2 sont

$$\frac{a^4}{R^2}, \quad +\infty, \quad -\infty.$$

Ainsi, x^2 croissant à partir de zéro, deux racines seront positives et ne pourront devenir imaginaires qu'en devenant d'abord égales.

Posons

$$(a^2 - x^2)^2 + x^2 y^2 = u.$$

Les valeurs de y^2 seront réelles, ou égales en même temps que celles de u .

L'équation devient

$$u^2 - \frac{a^4 R^2 (a^2 - x^2)^2}{x^2} u + \frac{a^4 R^2 (a^2 - x^2)^4}{x^2} = 0.$$

La condition de réalité des racines est

$$(a^2 - x^2)^2 [27 x^2 (a^2 - x^2)^2 + 4 a^4 R^2] \leq 0.$$

Lorsque x varie de zéro à a , la valeur maximum de $27 x^2 (a^2 - x^2)^2$ est $4 a^6$; donc si $R < a$, le premier membre de la relation précédente s'annulera pour deux valeurs de x comprises entre zéro et a , et pour une troisième valeur plus grande que a . Soient x_1, x_2, x_3 ces trois valeurs; y_1, y_2, y_3 les valeurs correspondantes de y .

A raison de la double symétrie, il suffit d'étudier la partie de la courbe située dans l'angle des coordonnées positives.

Une branche coupe l'axe des y au point $y = \frac{a^2}{R}$, s'en écarte jusqu'au point (x_1, y_1) , puis s'en rapproche indéfiniment en ayant cet axe pour asymptote. Entre les abscisses x_1 et x_2 , il n'y a aucun point de la courbe. Au

point (x_2, y_2) commence une boucle qui va se fermer au point $x = a, y = 0$; puis une nouvelle boucle, plus petite que la première, commence à ce point et va se fermer au point (x_3, y_3) : l'abscisse x_3 limite la courbe.

Si l'on a $R > a$, les boucles intérieures se réunissent à la partie centrale, et il n'y a plus de solution de continuité.

Dans le cas particulier où $R = 0$, l'équation (4) se décompose en deux autres :

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0, \\ x^6 y^4 + (x^2 - a^2)(2x^2 - 3a^2)x^4 y^2 + (x^2 - a^2)^3 = 0.$$

La première représente le cercle de rayon a , solution évidente *a priori*.

Pour $x^2 < a^2$, la seconde donne, pour y^2 , deux valeurs de signes contraires; il y a donc une seconde branche

$$y^2 = \frac{(a^2 - x^2) [(2x^2 - 3a^2)x + \sqrt{4a^6 - 3a^4 x^2}]}{2x^3}.$$

Pour $x^2 > a^2$, les deux valeurs de y^2 sont positives ou imaginaires : la condition de réalité est

$$x^2 < \frac{4a^2}{3}.$$

Ainsi, outre le cercle, on a une courbe, dont les deux branches asymptotiques de chaque côté à l'axe des y viennent toucher le cercle aux deux extrémités de l'axe donné, et forment ensuite de chaque côté deux boucles limitées aux droites $x = \pm \frac{2a}{\sqrt{3}}$, qu'elles touchent aux points $y = \pm \frac{a}{2\sqrt{6}}$.

Note. — Autres solutions de MM. Gustave Choquet, maître auxiliaire au lycée de Lille; Ferdinando Pisani, professeur; Barbarin, élève à l'École Normale supérieure.

Question 1227

(voir p. 192);

PAR M. CH. RRUNOT,

Élève en Mathématiques spéciales, au lycée de Dijon.

Si des différents points de la tangente au sommet d'une parabole on mène aux rayons aboutissant au foyer des perpendiculaires égales à ces rayons, le lieu de leurs extrémités se compose des deux tangentes à la parabole, inclinées de 45 degrés sur l'axe.

En conclure la propriété suivante du triangle ABC rectangle en A :

Soient a, b, c les centres des carrés respectivement construits sur l'hypoténuse et les deux côtés de l'angle droit; la ligne Aa est perpendiculaire, au point A , à la droite bAc , et elle lui est égale en longueur.

Application aux triangles dans lesquels on fait varier l'un des sommets B sur le côté AB.

(H. BROCARD.)

Soient a le foyer de la parabole; A le pied de la directrice; P un point quelconque de la tangente au sommet S de la parabole; BPC une perpendiculaire à Pa ; B et C deux points du lieu considéré; D le point où la droite aP prolongée rencontre la directrice, et α l'angle AaP (*). Si l'on décrit le cercle ayant P pour centre et passant au point a , il est circonscrit au triangle ABC , et les trois droites BC , AC et BC sont tangentes à la parabole; car, en joignant le point a aux points où ces droites rencontrent la tangente au sommet, les droites ainsi obtenues sont perpendiculaires à BC , AC , AB .

(*) Le lecteur est prié de faire la figure. — La droite aP étant per-

Soient a, b, c les centres des carrés construits sur l'hypoténuse BC et les côtés AC, AB du triangle rectangle BAC; la droite bAc est perpendiculaire sur Aa et les droites bAc, Aa sont égales entre elles, comme étant les projections de deux diamètres du cercle, faites sous des angles égaux à α (*).

Note. — Autre solution géométrique par M. Th. Franchy, maître répétiteur au lycée de Moulins.

Solutions analytiques par MM. Moret-Blanc; Lez; Pisani; Sondat; Jules Freson; Georges Lambiotte; Louis Thuillier, du lycée d'Amiens; Cauboue; Paul Souverain.

Question 1229

(voir p. 239);

PAR M. CH. BRUNOT,

Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Dijon.

« Si les trois racines de l'équation $x^3 - 3qx + r = 0$ sont réelles, chacune d'elles est moindre que $2\sqrt{q}$; mais, si une seule de ces racines est réelle, sa valeur surpasse $2\sqrt{q}$. » (R.-W. GENESE.)

1° En supposant les trois racines réelles, on a

$$-4q^3 + r^2 < 0$$

pendiculaire au milieu P de BC, on a $aB = aC$. La droite PS est perpendiculaire sur aA , en son milieu S : donc $PA = Pa = PD$. La circonférence décrite du point P. comme centre, avec Pa pour rayon, passe aux points a, A, B, C, D . Le quadrilatère $aBCD$ inscrit dans le cercle est un carré. L'angle BAC est droit. Les droites AB, AC font, avec l'axe Aa de la parabole, des angles de 45 degrés.

(*) Les points b, c sont les projections de B, C sur la directrice AD de la parabole, qui forme des angles de 45 degrés avec les côtés AB, AC de l'angle droit du triangle BAC. On a $bc = BC \cos \alpha$. Le point a est le centre du carré construit sur l'hypoténuse BC du triangle BAC, et $Aa = aD \cos \alpha = BC \cos \alpha$: donc $Aa = bc$.

ou

$$(r - 2q\sqrt{q})(r + 2q\sqrt{q}) < 0,$$

ce qui donne

$$r - 2q\sqrt{q} < 0 \quad \text{et} \quad r + 2q\sqrt{q} > 0.$$

Or le premier membre de la première de ces deux inégalités est le résultat de la substitution de $-2\sqrt{q}$ et de $+\sqrt{q}$ à x dans l'équation; de même, le premier membre de la seconde est le résultat de la substitution de $-\sqrt{q}$ et de $+2\sqrt{q}$: on n'a donc que des variations de signes dans la suite

$$f(-2\sqrt{q}), \quad f(-\sqrt{q}), \quad f(\sqrt{q}), \quad f(+2\sqrt{q}),$$

ce qui démontre la première partie de la proposition.

2^o Si une seule des racines est réelle, on aura

$$-4q^3 + r^2 > 0,$$

d'où

$$f(-2\sqrt{q}) > 0 \quad (*) :$$

la racine sera donc comprise entre $-\infty$ et $-2\sqrt{q}$; cette racine est, en valeur relative, inférieure à $-2\sqrt{q}$ (**).

Note. — Autres solutions de MM. Sondat; Moret-Blanc; Raymond Moreau, élève en Mathématiques élémentaires au lycée de Châteauroux (classe de M. Escary); et A. Muffat, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Lyon; Barthe, élève au lycée de Bordeaux (classe de M. La-grandval); Henri Picat, du lycée de Grenoble.

(*) En supposant que, les signes des termes de l'équation

$$x^3 - 3qx + r = 0$$

étant mis en évidence, les coefficients q et r soient positifs.

(**) En valeur absolue, elle est supérieure à $2\sqrt{q}$.