Nouvelles annales de mathématiques

Sur l'impossibilité de résoudre en nombres entiers l'équation $x^3 = y^2 + 17$

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 16 (1877), p. 325-326

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__325_1>

SUR L'IMPOSSIBILITÉ DE RÉSOUDRE EN NOMBRES ENTIERS L'ÉQUATION $x^3 = y^2 + 17$.

Cette équation revient à $x^3 + 2^3 = y^2 + 5^2$, d'où

$$(x+2)[(x-1)^2+3] = y^2 + 5^2. \tag{1}$$

Deux cas sont à distinguer : suivant que y est premier avec 5, ou multiple de 5.

Dans le premier, il faut, pour que l'équation admette une solution, en nombres entiers, que $(x-1)^2+3$ soit égal à la somme de deux carrés *premiers entre eux* (*), ce qui est impossible parce que le nombre entier $(x-1)^2+3$ est compris dans l'une ou l'autre de ces deux formes : $4n$, $4n+3$.

En second lieu, lorsque y est multiple de 5, l'équation (1) peut s'écrire

$$(x+2)[(x-1)^2+3] = 5^2(z^2+1), \tag{2}$$

en posant $y = 5z$.

(*) LEGENDRE, *Théorie des nombres*, t. I, p. 203, 3e édition. *Tout diviseur de la formule $t^2 + u^2$, composée de deux carrés premiers entre eux, est également la somme de deux carrés premiers entre eux.*

Or, $(x-1)^2+3$ est premier avec 5, car le chiffre des unités simples du carré d'un nombre entier, augmenté de 3, est nécessairement différent de 5 et de zéro. Par conséquent $(x-1)^2+3$ devrait être diviseur exact de z^2+1, ce qui est encore impossible, puisque $(x-1)^2+3$ n'est pas la somme de deux carrés *premiers entre eux*.

Donc, l'équation $x^3=y^2+17$ n'admet aucune solution *en nombres entiers*. (G.)