

Sur l'impossibilité de résoudre en nombres entiers l'équation $x^3 = y^2 + 17$

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 16 (1877), p. 325-326

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__325_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR L'IMPOSSIBILITÉ DE RÉSOUDRE EN NOMBRES ENTIERS
L'ÉQUATION $x^3 = y^2 + 17$.**

Cette équation revient à $x^3 + 2^3 = y^2 + 5^2$, d'où

$$(1) \quad (x + 2) [(x - 1)^2 + 3] = y^2 + 5^2.$$

Deux cas sont à distinguer : suivant que y est premier avec 5, ou multiple de 5.

Dans le premier, il faut, pour que l'équation admette une solution, en nombres entiers, que $(x - 1)^2 + 3$ soit égal à la somme de deux carrés *premiers entre eux* (*), ce qui est impossible parce que le nombre entier $(x - 1)^2 + 3$ est compris dans l'une ou l'autre de ces deux formes : $4n$, $4n + 3$.

En second lieu, lorsque y est multiple de 5, l'équation (1) peut s'écrire

$$(2) \quad (x + 2) [(x - 1)^2 + 3] = 5^2(z^2 + 1),$$

en posant $y = 5z$.

(*) LEGENDRE, *Théorie des nombres*, t. 1, p. 203, 3^e édition. Tout diviseur de la formule $v^2 + w^2$, composée de deux carrés premiers entre eux, est également la somme de deux carrés premiers entre eux.

Or, $(x - 1)^2 + 3$ est premier avec 5, car le chiffre des unités simples du carré d'un nombre entier, augmenté de 3, est nécessairement différent de 5 et de zéro. Par conséquent $(x - 1)^2 + 3$ devrait être diviseur exact de $z^2 + 1$, ce qui est encore impossible, puisque $(x - 1)^2 + 3$ n'est pas la somme de deux carrés *premiers entre eux*.

Donc, l'équation $x^3 = y^2 + 17$ n'admet aucune solution *en nombres entiers*. (G.)